Condensed Mathematics Seminar Note/ 凝縮数学ゼミノート

森口湧成

2026 年 7 月 14 日

概要

身内の中で勝手に私が凝縮数学について喋るゼミのノートを LaTeX 化したものです。
まだまだ浅学なので、多分に誤植が含まれていますがご容赦ください。もし誤植を見つけた方は、私まで連絡していただけると大変嬉しいです。

目次

1 導入 1
2 κ-condensed sets 3
3 Full condensed sets 13
4 Condensed abelian groups 26

1 導入

凝縮数学を考える動機の一つは、位相的な代数系を層論的・ホモロジー代数的に扱える統一的な枠組みを与えることである。典型的な対象として、例えば次のようなものがある。

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ などの位相群の表現
- 位相群 G が位相アーベル群 M に作用するときの連続群コホモロジー。
- $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}_p$ などの位相体上の代数幾何・解析幾何。

しかしながら、このような問題を考えるために必要な代数系は位相的性質と相性が悪い。

問題 1.1
TopAb はアーベル圏ではない。そのため、derived な議論も扱えない。例えば、離散位相を入れた実数群から通常位相を入れた実数群への恒等写像 $\mathbb{R}_{\mathrm{disc}} \longrightarrow \mathbb{R}$ は位相アーベル群の射である。これが同型でない理由は、アーベル圏であれば非自明な核または余核により説明されるべきであるが、この方法で Top Ab では説明できない。

問題 1.2
解析幾何の文脈では、$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Spec}\, A)$ の類似を位相的に作る際に問題がある。
スキームの場合には、A-加群 M から準連接層 $\widetilde{M}$ を作り、$U \longmapsto M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$ のように局所

化を記述できるが、adic などの状況で $U \longmapsto M\widehat{\otimes}_A \mathcal{O}_X(U)$ を作りたいとき、どの完備化を取るべきかは一般には明確でなく、適切な完備テンソル積を定義できない。
この問題は大体 solid module という p-adic な対象をうまく扱える condensed abelian group で正確に定式化できる。

凝縮数学の背景にある重要な着想の一つが、Bhatt–Scholze による pro-étale topology である [BS13, Introduction]。

X を代数閉体 k 上の多様体とし、$\ell \neq \mathrm{char}(k)$ とする。古典的な étale site は torsion coefficients に対してはよく機能するが、記号 $H^i(X_{ét}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は、$X_{ét}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-層 の cohomology をそのまま表すものではない。この仮定の下では、通常

$$H^i(X_{ét}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \left(\varprojlim_n H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \tag{1}$$

と定義する。ただし、一般の基礎体や一般のスキームに対しては、(1) のような単純な射影極限だけでは正しい定義にならず、射影極限の高次導来関手を考慮した continuous étale cohomology が必要になる。

constructible ℓ-adic complexes の導来圏についても、有限係数の導来圏 $D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ の射影系から $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を得る、という見方はあくまで heuristic である。実際には、compatible systems、completion、derived inverse limit などを扱う必要があり、導来圏の単純な射影極限を定義として用いることはできない。pro-étale topology は、このような無限的構成を層論の中で直接扱うために導入される。

定義 1.3
X をスキームとする。X の **pro-étale site** $X_{\mathrm{proét}}$ を次で定める。

- 対象は X 上の weakly étale なスキームである。ここで、射 $f\colon Y \to X$ が **weakly étale** であるとは、f とその対角射 $\Delta_f\colon Y \longrightarrow Y \times_X Y$ がともに flat であることをいう。
- 被覆族は fpqc cover である。

weakly étale morphism は有限表示ならば étale であり、ind-étale morphism は weakly étale である。この意味で、pro-étale topology は étale topology に近い一方、射影極限のような無限的構成により適している。

任意の topological space T は $X_{\mathrm{proét}}$ 上の定数層を定める。特に、topological ring $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を環付き層として扱える。X の underlying topological space が Noetherian であると仮定すると、constructibility は次のように簡潔に記述できる。

定義 1.4
$X_{\mathrm{proét}}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-module 層 について、次のように定める。

(i) 層 F が **lisse** であるとは、局所的に finite rank free であることをいう。
(ii) 層 C が **constructible** であるとは、locally closed subschemes による有限 stratification $X = \coprod_i X_i$ が存在し、各 X_i 上で $C|_{X_i}$ が lisse であることをいう。
(iii) $K \in D(X_{\mathrm{proét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が **constructible** であるとは、K が bounded であり、すべての

cohomology 層 が constructible であることをいう。

このようにして、

$$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset D(X_{\text{proét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を full triangulated subcategory として定義できる。上の設定では、$X_{\text{proét}}$ 上の定数層 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の cohomology は通常の ℓ-adic cohomology と一致し、一般の場合にも continuous étale cohomology を回復する。さらに、pro-étale site は局所的に w-contractible な対象で被覆できるため、逆極限や導来圏の構成が古典的な étale site より扱いやすくなる。

condensed mathematics は、この「位相的対象を適切な site 上の層として扱う」という発想を一点 $*$ の pro-étale site に適用する。これにより、topological group や topological ring などを層の圏の中の代数的対象として符号化し、その上で homological algebra を行うための枠組みが得られる。

2 κ-condensed sets

定義 2.1 ([Sch26b, Definition 1.2])
点の pro-étale site $*_{\text{proét}}$ とは次の site である。

- 対象は profinite set S。
- 被覆は、有限個の射からなる jointly surjective な族 $\{S_i \to S\}_{i=1}^n$。

注意 2.2
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Fin}) \simeq \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*) \simeq \mathrm{Set}$ であり、有限集合だけを使っても離散的な点の情報しか保たれず、本質的な位相情報は得られない。しかし、profinite sets 上で考えると、pro-étale cohomology の話で見たように、 特定の位相的な情報も層のレベルで保持できるようになる。

注意 2.3
ここで ProFin が large category であるというのは、各 profinite set や各 Hom-set が proper class であるという意味ではなく、ProFin の同型類全体が集合にならないという意味である。実際、任意の集合 I に対して Cantor cube $C_I := \{0,1\}^I = \prod_{i \in I} \{0,1\}$ を考える。各因子 $\{0,1\}$ を有限離散空間とみなすと、C_I は Tychonoff の定理により compact Hausdorff であり、さらに

$$C_I \simeq \varprojlim_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finite}}} \{0,1\}^J$$

と有限離散空間の射影極限として書けるので、profinite set である。また、$|C_I| = 2^{|I|} > |I|$ が Cantor の定理により成り立つ。
もし ProFin が essentially small ならば、その同型類の代表元を集合 $\{S_a\}_{a \in A}$ として選べる。そこで $\lambda := \sup_{a \in A} |S_a|$ とおくと、すべての代表元の濃度は λ 以下である。一方、$|I| = \lambda$ となる集合 I を取り C_I を考えると、C_I もある S_a と同型でなければならないが、$|C_I| = 2^\lambda > \lambda \geq |S_a|$ となり矛盾する。したがって ProFin は essentially small ではなく、その同型類は proper class をなす。ただし、固定した $S, T \in \mathrm{ProFin}$ に対する連続写像全体 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ProFin}}(S,T)$ は集合なの

で、ProFin は locally small ではある。
従って、ProFin を underlying category とする点の pro-étale site $*_{\text{proét}}$ は large site である。集合論的な大きさを管理せずにこの site 上の層の圏を作ると、どの universe における層を考えているかが曖昧になる。そこで cardinal κ を固定し、濃度 $< \kappa$ の profinite sets のみを考える。この部分圏が essentially small であることは、各 cardinal $\mu < \kappa$ に対して underlying set を標準的な集合 μ に取り替えれば、μ 上に入る topology 全体が power set $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mu))$ の部分集合であり、従って集合をなすことから分かる。さらに $\mu < \kappa$ なる cardinals 全体も集合なので、全体としても同型類は集合をなす。従って、同型類の代表元を一つずつ選んで skeleton を取れば small site になる。その上の Set 値 sheaves の圏 $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ は Grothendieck topos である。

この問題を避けるため、以下では uncountable strong limit cardinal κ を固定し、濃度 $< \kappa$ の profinite set だけを考える。strong limit 条件 $2^\mu < \kappa$ は、濃度 $< \kappa$ の集合に対する power-set 型の構成を再び濃度 $< \kappa$ に保つために用いられる。

定義 2.4
cardinal κ が **strong limit cardinal** であるとは、 任意の cardinal $\mu < \kappa$ に対して $2^\mu < \kappa$ が成り立つことをいう。 本稿では、[Sch26b] に従い、κ は非可算な strong limit cardinal であると仮定する。
このような濃度は、例えば Beth 数

$$\beth_0 = \aleph_0, \qquad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}, \qquad \beth_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta \quad (\alpha\text{: limit ordinal})$$

を用いて、適当な極限順序数 α に対する $\beth_\alpha$ として得られる。

定義 2.5
κ を uncountable strong limit cardinal とする。$*_{\kappa\text{-proét}}$ を、濃度 $< \kappa$ の profinite set からなる site とする。被覆は有限個の jointly surjective な射の族である。
κ-condensed set とは、$*_{\kappa\text{-proét}}$ 上の Set 値層のことである。κ-condensed sets の成す圏全体を $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}})$ と表す。

言い換えると、κ-condensed set は反変関手 $T\colon *^{\mathrm{op}}_{\kappa\text{-proét}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ であって $T(\emptyset) = *$ を満たし、さらに次の二条件を満たすものである。

(1) 任意の $S_1, S_2 \in *_{\kappa\text{-proét}}$ に対して、自然な写像 $T(S_1 \amalg S_2) \longrightarrow T(S_1) \times T(S_2)$ が全単射である。
(2) 任意の全射 $p\colon S' \to S$ に対し、二つの射影 $p_1, p_2\colon S' \times_S S' \to S'$ を用いて、自然な写像

$$T(S) \longrightarrow \{x \in T(S') \mid p_1^* x = p_2^* x \in T(S' \times_S S')\}$$

が全単射である。

これらは $*_{\kappa\text{-proét}}$ 上の層条件と同値である。
また、2023 年に [CS-AS] において導入された light condensed set も近年よく使われる。

定義 2.6

profinite set S が **light** であるとは、次の同値な条件を満たすことをいう。

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, \mathbb{Z})$ が可算集合である。
(2) S は metrizable である。
(3) S は second countable である。
(4) S は有限集合の可算射影極限として書ける。すなわち、有限集合 S_n の列が存在して $S \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} S_n$ と書ける。

light profinite sets からなる圏を $\mathrm{ProFin}_{\mathrm{light}}$ と書く。

定義 2.7

$\mathrm{ProFin}_{\mathrm{light}}$ に、有限個の jointly surjective な射の族を被覆として Grothendieck topology を入れる。この site を **点の light pro-étale site** と呼び、ここでは $*_{\text{light-proét}}$ または単に $\mathrm{ProFin}_{\mathrm{light}}$ と書く。

定義 2.8

light condensed set とは、$*_{\text{light-proét}}$ 上の Set 値層のことをいう。
light condensed sets の圏を $\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})^{\mathrm{light}} := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\text{light-proét}})$ と書く。

注意 2.9

$*_{\text{light-proét}}$ は small site なので、$\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})^{\mathrm{light}}$ は Grothendieck topos である。

非可算 strong limit cardinal κ を固定する。位相空間 T に対して $\underline{T}_\kappa(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, T)\,(S \in *_{\kappa\text{-proét}})$ と定める。これは κ-small profinite set から T への連続写像の集合を対応させる関手である。この記法は [Sch26b] における T と同じ対象を表すが、本ノートでは位相空間 T と付随する κ-condensed set を区別するために下線を付ける。κ が文脈から明らかなときは、$\underline{T}_\kappa$ を単に $\underline{T}$ と書く。

命題 2.10

任意の位相空間 T に対して、$\underline{T}$ は $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ の対象である。
これを位相空間の **condensification** という。

証明　$p\colon S' \to S$ を $*_{\kappa\text{-proét}}$ における被覆とする。さらに $S' = \coprod_i S_i$ と書くと、確認すべき層条件は

$$\mathrm{Hom}(S, T) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(S_i, T) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times_S S_j, T)$$

が equalizer であることである。これは

$$\mathrm{Hom}(S, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S', T) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S' \times_S S', T)$$

が equalizer であることと同値である。

まず、$h_1, h_2\colon S \to T$ が $h_1 \circ p = h_2 \circ p$ を満たすなら、p は全射なので $h_1 = h_2$ である。したがって左の写像は単射である。

次に $g\colon S' \to T$ が descent datum を満たすとする。すなわち、二つの射影 $p_1, p_2\colon S' \times_S S' \to S'$ に対して $g \circ p_1 = g \circ p_2$ である。任意の $s \in S$ に対して $p(s') = s$ となる $s' \in S'$ を選び、$f(s) := g(s')$ と定める。もし s'_1, s'_2 がともに s の逆像にあるなら、$(s'_1, s'_2) \in S' \times_S S'$ であり、descent datum より $g(s'_1) = g(s'_2)$ である。したがって $f\colon S \to T$ は矛盾なく定まる。また定義から $f \circ p = g$ である。

ここで S', S は compact Hausdorff space であり、$p\colon S' \to S$ は連続全射である。compact space から Hausdorff space への連続全射は quotient map であるから、$f \circ p = g$ が連続であることから f は連続である。よって g は一意な $f \in \mathrm{Hom}(S, T)$ から来る。これで equalizer 条件が示された。 □

ここで κ はあらかじめ固定されていることに注意する。定理 2.10 が述べているのは、各 κ に対する制限 $\underline{T}_\kappa$ が κ-condensed set になるということである。この命題だけから、ある一つの κ における $\underline{T}_\kappa$ を左 Kan 拡張すれば、任意の濃度の profinite set 上の値を同時に復元できるとは限らない。後者が full condensed set に必要な accessibility 条件 であり、定理 3.10 でこの違いを確認する。

定義 2.11
位相空間 X が **compactly generated** であるとは、写像 $f\colon X \to Y$ について、任意の compact Hausdorff space S と任意の連続写像 $g\colon S \to X$ に対して $f \circ g$ が連続ならば、f は連続であることをいう。

任意の位相空間 X に対し、同じ集合に compact Hausdorff space からの写像で誘導される終位相を入れた空間を X^{cg} と書く。compactly generated spaces 全体は Top の full subcategory をなし、包含 $\mathrm{CGTop} \hookrightarrow \mathrm{Top}$ は右随伴 $(-)^{\mathrm{cg}}$ を持つ。すなわち $\mathrm{inc}\colon \mathrm{CGTop} \rightleftarrows \mathrm{Top}\colon (-)^{\mathrm{cg}}$ である。

定義 2.12
さらに、非可算 strong limit cardinal κ を固定する。位相空間 X が **κ-compactly generated** であるとは、濃度 $< \kappa$ の compact Hausdorff spaces S からの写像 $\coprod_{S \to X} S \longrightarrow X$ に関する商位相を X が持つことをいう。このとき対応する右随伴を $X \longmapsto X^{\kappa\text{-cg}}$ と書く。

Stone–Čech compactification functor を β と書く。以下でも繰り返し用いる Stone–Čech 被覆を確認しておく。compact Hausdorff space S に離散位相を入れた空間を S^δ と書くと、恒等写像 $S^\delta \to S$ は連続全射 $\beta(S^\delta) \twoheadrightarrow S$ に延長される。$\beta(S^\delta)$ は profinite set であり、$|S| < \kappa$ なら $|\beta(S^\delta)| \leq 2^{2^{|S|}} < \kappa$ なので濃度条件も保たれる。従って、任意の κ-small compact Hausdorff space は κ-small profinite set からの全射を持つ。

命題 2.13 ([Sch26b, Proposition 1.7])
位相空間、位相群、位相環などの圏から κ-condensed sets/groups/rings などの圏への関手 $X \longmapsto \underline{X}$ は faithful である。さらに、台となる位相空間が κ-compactly generated である対象の full subcategory に制限すると fully faithful である。
また、位相空間から κ-condensed sets への関手 $X \longmapsto \underline{X}$ は左随伴を持つ。κ-condensed set T に対し、その左随伴は集合 $T(*)$ に次の商位相を入れた位相空間 $T(*)_{\mathrm{top}}$ を対応させる。

$$\coprod_{(S,t)} S \longrightarrow T(*), \qquad (S,t) \text{ は } S \in *_{\kappa\text{-proét}},\ t \in T(S)$$

ここで各 S は profinite 位相を持つ。

証明　位相空間の場合を示せば十分である。実際、位相群、位相環などの場合は、位相空間に演算写像を加えた図式圏と見れば $\underline{(-)}$ が finite products を保つことから位相空間の場合の証明から直ちに従う。

まず faithful 性を示す。連続写像 $f, g\colon X \to Y$ が $\underline{f} = \underline{g}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ を誘導するとする。これを一点集合 $*$ で評価すると $f = g\colon \underline{X}(*) = X \longrightarrow \underline{Y}(*) = Y$ である。したがって $X \mapsto \underline{X}$ は faithful である。

次に左随伴を構成する。T を κ-condensed set とする。$S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ と $t \in T(S)$ に対し、写像 $\theta_{S,t}\colon S \longrightarrow T(*)$ を次で定める。点 $s \in S$ を連続写像 $s\colon * \to S$ と見なし、$\theta_{S,t}(s) := T(s)(t) \in T(*)$ とおく。ここで $T(s)\colon T(S) \longrightarrow T(*)$ は、反変関手 T を射 $s : * \to S$ に適用して得られる写像である。

集合 $T(*)$ に、すべての $S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ と $t \in T(S)$ から定まる写像 $\theta_{S,t}\colon S \longrightarrow T(*)$ に関する終位相を入れた位相空間を $T(*)_{\mathrm{top}}$ と書く。

任意の位相空間 X に対して、自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(T, \underline{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T(*)_{\mathrm{top}}, X)$$

を構成する。

まず $\varphi\colon T \to \underline{X}$ が与えられたとする。φ を $*$ で評価して得られる写像を $h_\varphi := \varphi(*)\colon T(*) \longrightarrow \underline{X}(*) = X$ と書く。任意の $S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ と $t \in T(S)$ に対し、自然性により次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\theta_{S,t}} & T(*) \\ & \searrow^{\varphi(S)(t)} & \downarrow{\scriptstyle h_\varphi} \\ & & X \end{array}$$

ここで $\varphi(S)(t) \in \underline{X}(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$ である。したがって対角の写像 $S \to X$ は連続である。つまり、すべての $\theta_{S,t}\colon S \to T(*)$ に沿った合成 $S \xrightarrow{\theta_{S,t}} T(*) \xrightarrow{h_\varphi} X$ は連続である。$T(*)_{\mathrm{top}}$ はこれらの写像に関する終位相で定義されているので、h_φ は連続写像 $h_\varphi\colon T(*)_{\mathrm{top}} \longrightarrow X$ を定める。

逆に、連続写像 $h\colon T(*)_{\mathrm{top}} \longrightarrow X$ が与えられたとする。このとき各 $S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ に対して写像 $\Phi_h(S)\colon T(S) \longrightarrow \underline{X}(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$ を $\Phi_h(S)(t) := h \circ \theta_{S,t}$ により定める。h と $\theta_{S,t}$ は連続なので、$h \circ \theta_{S,t}\colon S \longrightarrow X$ は連続である。

この対応が S に関して自然であることを確認する。射 $u\colon S' \longrightarrow S$ を $*_{\kappa\text{-proét}}$ の射とする。$t \in T(S)$ に対して、$T(u)(t) \in T(S')$ である。このとき、点 $s'\colon * \to S'$ において

$$\theta_{S', T(u)(t)}(s') = T(s')\big(T(u)(t)\big) = T(u \circ s')(t) = \theta_{S,t}(u(s'))$$

である。したがって $\theta_{S', T(u)(t)} = \theta_{S,t} \circ u$ が成り立つ。これは次の可換図式で表される。

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{u} & S \\ {\scriptstyle \theta_{S', T(u)(t)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{S,t}} \\ T(*) & = & T(*) \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} \Phi_h(S')\big(T(u)(t)\big) &= h \circ \theta_{S', T(u)(t)} \\ &= h \circ \theta_{S,t} \circ u \\ &= \underline{X}(u)\big(\Phi_h(S)(t)\big) \end{aligned}$$

したがって Φ_h は自然変換 $\Phi_h\colon T \longrightarrow \underline{X}$ を定める。

以上の二つの構成 $\varphi \longmapsto h_\varphi, h \longmapsto \Phi_h$ は互いに逆である。したがって自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(T, \underline{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T(*)_{\mathrm{top}}, X)$$

が得られる。ゆえに $T \longmapsto T(*)_{\mathrm{top}}$ は $X \longmapsto \underline{X}$ の左随伴である。

次に counit を定める。$T = \underline{X}$ とおくと $\underline{X}(*) = X$ であり、$t \in \underline{X}(S)$ は連続写像 $t\colon S \longrightarrow X$ そのものである。このとき点 $s\colon * \to S$ に対して $\theta_{S,t}(s) = \underline{X}(s)(t) = t \circ s$ であるから、$\theta_{S,t}\colon S \longrightarrow \underline{X}(*) = X$ は、もとの連続写像 $t\colon S \to X$ と一致する。したがって $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}}$ は、集合 X に対し、すべての κ-small profinite set からの連続写像 $S \longrightarrow X$ に関する終位相を入れた空間である。

一方、$X^{\kappa\text{-cg}}$ は、すべての κ-small compact Hausdorff space からの連続写像に関する終位相によって定義される。前述の Stone–Čech 被覆により、そのような空間 K は κ-small profinite set P からの全射 $P \twoheadrightarrow K$ を持つ。この全射は quotient map なので、$K \to X$ の連続性は合成 $P \to X$ の連続性で判定できる。よって compact Hausdorff spaces を用いる終位相と、profinite sets のみを用いる終位相は一致する。

したがって $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \simeq X^{\kappa\text{-cg}}$ であり、この同一視のもとで随伴の counit $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \longrightarrow X$ は自然な写像 $X^{\kappa\text{-cg}} \longrightarrow X$ と一致する。

最後に fully faithful 性を示す。X が κ-compactly generated ならば $X^{\kappa\text{-cg}} \xrightarrow{\sim} X$ である。したがって任意の位相空間 Y に対し、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(\underline{X}, \underline{Y}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\underline{X}(*)_{\mathrm{top}}, Y)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X^{\kappa\text{-cg}}, Y)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X, Y)\end{aligned}$$

これは $X \mapsto \underline{X}$ によって誘導される写像の逆である。ゆえに、κ-compactly generated spaces に制限すると $X \mapsto \underline{X}$ は fully faithful である。 □

命題 2.14 (Comparison lemma)
site $\mathcal{C}$ と、その充満部分圏 $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ を考える。$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ から誘導される Grothendieck topology を入れた site とする。次を仮定する。

(1) 任意の $S \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{B}$ の対象からの被覆 $B \twoheadrightarrow S$ が存在する。
(2) 任意の射 $P \to S$（ただし $P \in \mathcal{B}$）と、$\mathcal{B}$ の対象からなる被覆 $Q \twoheadrightarrow S$ に対し、引き戻し $P \times_S Q \to P$ は $\mathcal{B}$ の対象からの被覆で refine できる。
(3) $\mathcal{C}$ の被覆は $\mathcal{B}$ の被覆で refine できる。

このとき、$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の basis をなし、包含関手 $i\colon \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$ による制限関手 $i^*\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathcal{B})$ は圏同値である。

証明 $S \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{B}$ 上の前層 $h_S^{\mathcal{B}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S)|_{\mathcal{B}}$ を考える。$F \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathcal{B})$ に対して

$$(i_*F)(S) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{B})}(h_S^{\mathcal{B}}, F) \tag{2}$$

とおく。これは、$\mathcal{B}$ の対象からの各射 $B \to S$ に $F(B)$ の元を対応させ、$\mathcal{B}$ 内の射による引き戻しと両立させたデータの集合である。まず (i_*F) が $\mathcal{C}$ 上の層であることを示す。$\{S_a \to S\}_a$ を $\mathcal{C}$ の被覆とし、$(i_*F)(S_a)$ の matching family を取る。$P \to S$ を $P \in \mathcal{B}$ とする。$\{P \times_S S_a \to P\}_a$ は $\mathcal{C}$ の被覆である。仮定 (3) によりこれは $\mathcal{B}$ の対象からなる被覆で refine できる。その各項で matching family を

評価すると F の matching family が得られる。二つの項の交わりでの一致は、仮定 (2) により $\mathcal{B}$ の被覆へ refine して検査できるので、F の層条件から一意に $F(P)$ の元へ貼り合わさる。この元は $P \to S$ に自然であるから、(2) の元を定める。同じ議論は局所的に等しい二つの元が等しいことも示す。よって i_*F は層である。

$B \in \mathcal{B}$ に対しては、$\mathcal{B}$ が充満であることと Yoneda の補題から

$$(i^*i_*F)(B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{B})}(h_B^{\mathcal{B}}, F) \simeq F(B)$$

である。従って $i^*i_* \simeq \mathrm{id}$ である。

逆に $G \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathcal{C})$ とする。自然な射 $G(S) \longrightarrow (i_*i^*G)(S)$ は、$x \in G(S)$ を各 $B \to S$ への引き戻し $x|_B$ に送る。これは全単射である。実際、仮定 (1) により $\mathcal{B}$ の対象からなる S の被覆を取れる。右辺の元をこの被覆上で評価すると、仮定 (2) により共通部分を $\mathcal{B}$ の被覆で検査できる matching family になる。G の層条件により、それらは一意な $x \in G(S)$ に貼り合わさる。この x は与えられた自然変換を復元する。したがって $G \simeq i_*i^*G$ である。

以上より i^* と i_* は互いに擬逆であり、主張の圏同値を得る。 □

命題 2.15 ([Sch26b, Proposition 2.3])
濃度 $< \kappa$ の compact Hausdorff spaces からなる site $\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ を、有限個の jointly surjective な射の族を被覆として定める。この site 上の Set 値層の圏は、profinite sets への制限により

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}) \simeq \mathrm{Cond}_{\kappa}(\mathrm{Set})\ (= \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}))$$

という圏同値が成り立つ。

証明　包含を $i\colon *_{\kappa\text{-proét}} \hookrightarrow \mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ と書き、命題 2.14 を適用する。

まず、任意の $K \in \mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ は、Stone–Čech 被覆 $\beta(K^\delta) \twoheadrightarrow K$ を持つ。その始域は κ-small profinite set なので、命題 2.14 の仮定 (1) が成り立つ。

次に、$P, Q \in *_{\kappa\text{-proét}}$ と射 $P \to K \leftarrow Q$ を取り、$Q \to K$ は全射とする。pullback $P \times_K Q$ は κ-small compact Hausdorff space であるから、再び Stone–Čech 被覆を適用すると、κ-small profinite set からの全射 $\beta((P \times_K Q)^\delta) \twoheadrightarrow P \times_K Q$ を得る。従って引き戻した被覆は $*_{\kappa\text{-proét}}$ の対象からの被覆で refine でき、命題 2.14 の仮定 (2) が成り立つ。

最後に、$P \in *_{\kappa\text{-proét}}$ の有限被覆 $\{K_j \to P\}_{j=1}^n$ を $\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ で取る。各 K_j を κ-small profinite set S_j で被覆すれば、合成の族 $\{S_j \to K_j \to P\}_{j=1}^n$ は $*_{\kappa\text{-proét}}$ における被覆である。これで命題 2.14 の仮定 (3) も成り立つ。

よって $*_{\kappa\text{-proét}}$ は $\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ の basis をなし、命題 2.14 により制限関手 $i^*\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}})$ は圏同値である。 □

定義 2.16 ([Sch26b, Definition 2.4])
compact Hausdorff space S が **extremally disconnected** であるとは、任意の開集合の閉包が再び開集合になることをいう。同値に、任意の compact Hausdorff space からの全射 $S' \twoheadrightarrow S$ が section を持つことをいう。
このとき clopen subsets は S の位相の基底をなす。実際、$x \in U$ を開近傍とすると、正規性から $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ となる開集合 V を取れ、$\overline{V}$ は定義により clopen である。

命題 2.17 ([Sch26b, Proposition 2.8])
$\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ を κ-small な extremally disconnected compact Hausdorff spaces の site とする。被覆は有限個の jointly surjective な射の族で定める。このとき

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}) \simeq \mathrm{Cond}_{\kappa}(\mathrm{Set}) \,(= \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-pro\'et}}))$$

が成り立つ。

証明 $\mathcal{B} := \mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$、$\mathcal{C} := *_{\kappa\text{-pro\'et}}$ とし、命題 2.14 を適用する。任意の κ-small compact Hausdorff space K に対して $\beta(K^{\delta})$ は κ-small extremally disconnected compact Hausdorff space であり、自然な全射 $\beta(K^{\delta}) \twoheadrightarrow K$ を持つ。 特に任意の $S \in \mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ の対象から被覆されるので、仮定 (1) が成り立つ。また、$P \in \mathcal{B}$ と被覆 $Q \to S$（$Q \in \mathcal{B}$）に対して、$P \times_S Q$ は κ-small compact Hausdorff space である。従って $\beta((P \times_S Q)^{\delta}) \twoheadrightarrow P \times_S Q$ を取れば、仮定 (2) を得る。最後に、$\mathcal{C}$ の有限被覆 $\{S_j \to S\}_{j=1}^{n}$ に対して各 S_j を $\mathcal{B}$ の対象で被覆し、その合成を取れば、もとの被覆を $\mathcal{B}$ の被覆で refine できる。従って仮定 (3) も成り立つ。

よって $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の basis をなし、制限関手 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-pro\'et}}) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})$ は圏同値である。左辺は $\mathrm{Cond}_{\kappa}(\mathrm{Set})$ なので主張を得る。 □

注意 2.18
命題 2.15 という状況は light な状況でも成立するが、命題 2.17 という状況は light extremally disconnected compact Hausdorff spaces を用いて述べることはできない。実際、extremally disconnected compact Hausdorff space では任意の収束列は eventually constant である。一方、無限 compact metrizable space には非自明な収束列が存在する。したがって、metrizable かつ extremally disconnected な compact Hausdorff space は有限集合である。よって light extremally disconnected spaces は、Cantor set のような無限 light profinite set を被覆できず、light での類似の命題は成り立たない。

注意 2.19
上で述べた、light extremally disconnected spaces で light profinite set を被覆できないというのは light の一つの問題となる。たとえば、condensed anima といった ∞-categorical な object を考えると、これは単純な ∞-層 として定義ができず、hypersheaf として定義する必要がある。full condensed では、

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ani}}(*^{\mathrm{hyp}}_{\mathrm{pro\acute{e}t}}) \simeq \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ani}}(*_{\mathrm{pro\acute{e}t}})$$

ということが成り立つので問題ないが、この証明には本質的に extremally disconnected spaces の性質を用いているからである。詳しくは、[RZ26] などを参照のこと。

定義 2.20
κ を cardinal とする。κ を対応する initial ordinal と同一視する。κ の **cofinality** とは、κ の cofinal subset の濃度の最小値であり、

$$\mathrm{cf}(\kappa) := \inf \left\{ |I| \;\middle|\; \text{ある写像 } a\colon I \to \kappa \text{ が存在して } \sup_{i \in I} a_i = \kappa \right\}$$

により定義される。
同値に、$\mathrm{cf}(\kappa)$ は $\kappa = \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha, \kappa_\alpha < \kappa$ となる増大列 $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ が存在するような cardinal λ の最小値である。

注意 2.21
[Sch26b, Remark 2.7] は、extremally disconnected compact Hausdorff space が condensed mathematics だけでなく、forcing と集合論のモデル構成にも深く現れることを指摘している。
まず、S を extremally disconnected compact Hausdorff space とする。このとき、S の clopen subsets 全体 $\mathrm{Clop}(S)$ は complete Boolean algebra をなす。逆に、complete Boolean algebra の Stone 空間は extremally disconnected compact Hausdorff space である。したがって、extremally disconnected compact Hausdorff spaces は、forcing で用いられる complete Boolean algebras の位相空間的表示と見ることができる。
S の clopen subsets からなる圏に、次の Grothendieck topology を入れる。$U \in \mathrm{Clop}(S)$ に対し、clopen subsets の族 $\{U_i \subset U\}_{i\in I}$ が U の被覆であるとは、$\bigcup_{i\in I} U_i \subset U$ が U の中で dense であることをいう。この site 上の層の圏を $\mathrm{Sh}^\wedge(S)$ と書く。すなわち

$$\mathrm{Sh}^\wedge(S) := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}\big(\mathrm{Clop}(S), J_{\mathrm{dense}}\big)$$

である。
より一般に、$U \subset S$ が clopen subset であれば、同じ構成により $\mathrm{Sh}^\wedge(U)$ を定義できる。包含 $V \subset U$ に対しては、開部分への制限により pullback functor $j^*_{V,U}\colon \mathrm{Sh}^\wedge(U) \longrightarrow \mathrm{Sh}^\wedge(V)$ がある。いま点 $s \in S$ を固定する。s を含む clopen neighborhoods $U \subset S$ を動かし、pullback functors に沿って 2-category of categories における filtered colimit

$$\mathcal{M}_{S,s} := \operatorname*{2\text{-}colim}_{s\in U\subset S} \mathrm{Sh}^\wedge(U)$$

を取る。[Sch26b, Remark 2.7] によれば、この圏 $\mathcal{M}_{S,s}$ は ETCSR、すなわち elementary theory of the category of sets with replacement のモデルになる。ETCSR は、通常の membership-based な集合論を集合の圏という構造から記述する category-theoretic な集合論であり、ZFC と本質的に同等の役割を果たす。
この辺りの内容は、私の能力不足により何も話せないので、[BLH24] や [BB26] や [Shu18] を参照のこと。

命題 2.22 ([Sch26b, Proposition 2.9])
左 Kan 拡張から得られる関手 $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$ は fully faithful である。さらに、この関手はすべての colimit と、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ に対する λ-small limit と可換である。

証明　包含関手を $i\colon \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ と書く。このとき制限関手は

$$i^*\colon \mathrm{Fun}(\mathrm{Extr}_{\kappa'}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Extr}_{\kappa}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}), \qquad F \longmapsto F \circ i^{\mathrm{op}}$$

であり、Kan 拡張との標準的な随伴 $\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} \dashv i^* \dashv \mathrm{Ran}_{i^{\mathrm{op}}}$ がある。

この同一視のもとで、命題の関手 $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$ は $T \longmapsto T_{\kappa'} := \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T$ で与えられる。すなわち、$\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ に対して

$$T_{\kappa'}(\widetilde{S}) = \big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{(i^{\mathrm{op}} \downarrow \widetilde{S})} T$$

である。

この comma 圏の対象を元の圏 $\mathrm{Extr}_{\kappa'}$ で書き直すと、それは κ-small extremally disconnected set S と射 $\widetilde{S} \longrightarrow S$ の組である。したがって

$$\big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{(\widetilde{S} \to S)} T(S)$$

である。ここで colimit は、κ-small extremally disconnected set S と射 $\widetilde{S} \to S$ 全体にわたって取る。

まず fully faithful 性を示す。$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} \dashv i^*$ の unit $T \longrightarrow i^* \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T$ が同型であることを確認すればよい。

$S_0 \in \mathrm{Extr}_\kappa$ とする。このとき

$$\big(i^* \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(S_0) = \big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(S_0) = \operatorname*{colim}_{(S_0 \to S)} T(S)$$

ただし S は κ-small extremally disconnected set を動く。この添字圏において $S_0 \xrightarrow{\mathrm{id}} S_0$ は終対象である。実際、任意の対象 $S_0 \to S$ に対して、それ自身を用いて一意な射 $(S_0 \to S) \longrightarrow (S_0 \xrightarrow{\mathrm{id}} S_0)$ が得られる。したがって $\mathrm{colim}_{(S_0 \to S)} T(S) \simeq T(S_0)$ である。よって $T \xrightarrow{\sim} i^* \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T$ であり、unit は同型である。したがって $\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} : \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$ は fully faithful である。

また $\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}}$ は左随伴であるから、すべての colimit と可換である。

残りは、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ に対する λ-small limit と可換であることを示すことである。$\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ を固定し、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}} := (i^{\mathrm{op}} \downarrow \widetilde{S})$ とおく。すなわち、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ の対象は $\widetilde{S} \longrightarrow S$、$S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ であり、

$$\big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{S \in \mathcal{I}_{\widetilde{S}}} T(S)$$

と書ける。

よって、$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}}$ が λ-small limit と可換であることを示すには、各 $\widetilde{S}$ について $\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ が λ-filtered であることを示せばよい。実際、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ は regular cardinal であり、Set において λ-filtered colimit は λ-small limit と可換する。

そこで、λ-small な図式 $j \longmapsto \big(\widetilde{S} \to S_j\big)$ を $\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ に取る。ここで各 S_j は κ-small extremally disconnected set である。この図式の $\mathrm{Extr}_{\kappa'}$ における極限を $L := \varprojlim_j S_j$ とおく。

まず L は κ-small compact Hausdorff space である。実際、添字圏は λ-small であり、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ なので、$\mu := \sup_j |S_j| < \kappa$ である。したがって

$$|L| \leq \prod_j |S_j| \leq \mu^\lambda \leq 2^{\mu \cdot \lambda} < \kappa$$

最後の不等号は、$\mu \cdot \lambda < \kappa$ と、κ が strong limit cardinal であることによる。

L は一般には extremally disconnected とは限らないので、κ-small extremally disconnected set S と全射 $S \twoheadrightarrow L$ を取る。例えば $S := \beta(L^\delta)$ とすればよい。κ が strong limit cardinal であることから、この S は κ-small に取れる。

図式の各対象には射 $\widetilde{S} \to S_j$ が与えられているので、普遍性により射 $\widetilde{S} \longrightarrow L = \varprojlim_j S_j$ が得られる。さらに $\widetilde{S}$ は extremally disconnected であり、$S \twoheadrightarrow L$ は全射なので、この射は持ち上がる。すなわち、次の図式を可換にする射 $\widetilde{S} \to S$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & \nearrow & \downarrow \\ \widetilde{S} & \longrightarrow & L \end{array}$$

各 j について合成 $S \longrightarrow L \longrightarrow S_j$ を考えると、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & \nearrow & \downarrow \\ \widetilde{S} & \longrightarrow & S_j \end{array}$$

したがって、対象 $\widetilde{S} \longrightarrow S$ は、もとの λ-small 図式の cocone を与え、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ は λ-filtered である。

また、任意の λ-small diagram $(T_a)_{a\in A}$ に対して、各 $\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ で

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}}(\lim_{a\in A} T_a)\right)(\widetilde{S}) &= \operatorname*{colim}_{S\in\mathcal{I}_{\widetilde{S}}} \left(\lim_{a\in A} T_a(S)\right) \\ &\simeq \lim_{a\in A} \operatorname*{colim}_{S\in\mathcal{I}_{\widetilde{S}}} T_a(S) \\ &= \left(\lim_{a\in A} \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T_a\right)(\widetilde{S}) \end{aligned}$$

中央の同型は、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ が λ-filtered であり、Set において λ-filtered colimit が λ-small limit と可換することによる。

以上より $\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} : \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$ は fully faithful であり、すべての colimit と $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ に対する λ-small limit と可換である。 □

3 Full condensed sets

前節では κ を固定して $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ を考え、cardinal を大きくしたときの fully faithful な関手を構成した。本節では、それらの filtered colimit を cardinal の選び方に依存しない full condensed sets の圏としてまとめる。このために、extremally disconnected compact Hausdorff space 全体の圏を Extr と書き、κ-small な対象からなる充満部分圏を Extr_κ と書く。命題 2.17 の圏同値により、$T_\kappa \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ は $\mathrm{Extr}_\kappa^{\mathrm{op}}$ 上の関手とみなす。

定義 3.1 (Full condensed set; [Sch26b, Definition 2.11])
full condensed set とは、前層 $T\colon \mathrm{Extr}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ であって、次を満たすものをいう。

(i) $T(\emptyset) = *$ である。
(ii) 任意の $S_1, S_2 \in \mathrm{Extr}$ に対して、自然な射

$$T(S_1 \amalg S_2) \longrightarrow T(S_1) \times T(S_2)$$

は同型である。
(iii) ある非可算 strong limit cardinal κ と $T_\kappa \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ が存在して、包含 $i_\kappa\colon \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}$

に対し $T \simeq \mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_\kappa$ と書ける。

このような対象の圏は

$$\mathrm{Cond}(\mathrm{Set}) := \operatorname*{colim}_{\kappa} \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$$

と書ける。ここで右辺の colimit は、非可算 strong limit cardinal 全体のなす filtered poset に沿うものである。

注意 3.2

条件 (iii) は、T に対する集合論的な大きさの条件、より正確には **到達可能条件** である。(i), (ii) だけでは、large category Extr の任意に大きな対象上で新しいデータを持つような関手も許され、T がある一つの cardinal の値から決定されることは保証されない。これに対し (iii) は、任意の $S \in \mathrm{Extr}$ に対して

$$T(S) \simeq \operatorname*{colim}_{\substack{S \to S_\kappa \\ S_\kappa \in \mathrm{Extr}_\kappa}} T_\kappa(S_\kappa)$$

と書けることを要求する。すなわち、任意に大きな S における $T(S)$ は、κ-small な extremally disconnected sets への写像を通して、T_κ の値から一意的に復元される。従って T は任意の濃度ごとに独立なデータを持つのではなく、ある一つの small category Extr_κ 上のデータによって決定される。

条件 (iii) には二つの役割がある。第一に、各 full condensed set がある $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ から来るため、 full condensed sets の圏を small cone 上の filtered colimit として定義できる。第二に、二つの対象を共通の十分大きい cone に移してその Hom を計算できるため、Cond(Set) が locally small になる（定理 3.3）。(iii) を課さなければ、large category Extr 上の関手圏の Hom は a priori proper class になり得る。また、定理 3.10 の Sierpiński 空間は、full pro-étale site 上の層ではあるが、この到達可能条件を満たさない例である。

命題 3.3

full condensed sets の圏 Cond(Set) は locally small である。

証明　$T_1, T_2 \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Set})$ を取る。定義により、非可算 strong limit cardinal κ_1, κ_2 と

$$T_i \simeq \mathrm{Lan}_{i_{\kappa_i}^{\mathrm{op}}} T_{\kappa_i}, \qquad T_{\kappa_i} \in \mathrm{Cond}_{\kappa_i}(\mathrm{Set}) \qquad (i = 1, 2)$$

が存在する。$\kappa > \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$ となる非可算 strong limit cardinal κ を選ぶ。包含を $i_{\kappa_i,\kappa} \colon \mathrm{Extr}_{\kappa_i} \hookrightarrow \mathrm{Extr}_\kappa, i_\kappa \colon \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}$ と書き、

$$T_i' := \mathrm{Lan}_{i_{\kappa_i,\kappa}^{\mathrm{op}}} T_{\kappa_i} \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \qquad (i = 1, 2)$$

とおく。左 Kan 拡張の合成則から $T_i \simeq \mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_i'$ である。

i_κ は充満忠実である。一般に充満忠実な関手 j に沿う左 Kan 拡張については、随伴の単位射

$\mathrm{id} \longrightarrow j^* \operatorname{Lan}_j$ が同型である。従って $i_\kappa^* \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} \simeq \mathrm{id}$ であり、随伴を二度用いると

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(T_1, T_2) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})}\left(\operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_1', \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_2'\right) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Extr}_\kappa^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})}\left(T_1', i_\kappa^* \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_2'\right) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(T_1', T_2')\end{aligned}$$

を得る。最後の Hom は局所小圏 $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ における Hom なので集合である。よって Cond(Set) は locally small である。 □

以下、Extr には有限個の jointly surjective な射の族を被覆とする Grothendieck topology を入れる。このとき

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}) \simeq \left\{ T\colon \mathrm{Extr}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set} \;\middle|\; \begin{array}{l} T(\emptyset) \simeq *, \\ T(S_1 \amalg S_2) \simeq T(S_1) \times T(S_2) \end{array} \right\}$$

と記述できる。実際、任意の有限被覆に現れる対象と射は、十分大きい非可算 strong limit cardinal κ に対して Extr_κ に含まれるので、これは命題 2.17 における層条件の記述に帰着する。

ここで Extr は large category であるため、$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ は small site 上の通常の層の圏ではなく、すべての extremally disconnected compact Hausdorff spaces 上の層からなる大きな圏という意味で用いる。

命題 3.4

忘却関手 $\iota\colon \mathrm{Cond(Set)} \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ は fully faithful である。
その essential image は、ある非可算 strong limit cardinal κ に対して、包含 $i_\kappa\colon \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}$ に関する随伴の counit $\varepsilon_{T,\kappa}\colon \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}}\left(i_\kappa^* T\right) \longrightarrow T$ が同型となるような $T \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ 全体である。

証明 full condensed set T は、定義により有限直和を有限直積に送る関手 $T\colon \mathrm{Extr}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ である。従って、上で述べた層条件の記述により $T \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ であり、忘却関手 $\iota\colon \mathrm{Cond(Set)} \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ が定まる。

まず essential image を確認する。$T \in \mathrm{Cond(Set)}$ とすると、ある非可算 strong limit cardinal κ と $T_\kappa \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ が存在して $T \simeq \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_\kappa$ と書ける。i_κ は充満包含であるから、随伴 $\operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} \dashv i_\kappa^*$ の unit は同型である。従って

$$T_\kappa \xrightarrow{\sim} i_\kappa^* \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_\kappa \simeq i_\kappa^* T$$

よって $T \simeq \operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}}\left(i_\kappa^* T\right)$、すなわち $\varepsilon_{T,\kappa}$ は同型である。

逆に、$T \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ に対して、ある κ について $\operatorname{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}}\left(i_\kappa^* T\right) \xrightarrow{\sim} T$ であると仮定する。制限 $i_\kappa^* T$ は Extr_κ 上の層なので、$i_\kappa^* T \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_\kappa) \simeq \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ である。従って T は、ある κ-condensed set からの左 Kan 拡張であり、full condensed set である。これで essential image の記述が得られた。

次に fully faithful 性を示す。$T, U \in \mathrm{Cond(Set)}$ を取る。定義に現れる二つの cardinal より大きい非可算 strong limit cardinal μ を選ぶ。左 Kan 拡張の推移性と cardinal を変更する遷移関手の記述により、

$$T \simeq \operatorname{Lan}_{i_\mu^{\mathrm{op}}} T_\mu, \qquad U \simeq \operatorname{Lan}_{i_\mu^{\mathrm{op}}} U_\mu,$$

と書ける。ただし $T_\mu := i_\mu^* T, U_\mu := i_\mu^* U$ であり、$T_\mu, U_\mu \in \mathrm{Cond}_\mu(\mathrm{Set})$ である。

Kan 拡張と制限の随伴を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})}(T,U) &\simeq \mathrm{Nat}_{\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}}\left(\mathrm{Lan}_{i_\mu^{\mathrm{op}}} T_\mu, \mathrm{Lan}_{i_\mu^{\mathrm{op}}} U_\mu\right)\\ &\simeq \mathrm{Nat}_{\mathrm{Extr}_\mu^{\mathrm{op}}}\left(T_\mu, i_\mu^* \mathrm{Lan}_{i_\mu^{\mathrm{op}}} U_\mu\right)\\ &\simeq \mathrm{Nat}_{\mathrm{Extr}_\mu^{\mathrm{op}}}(T_\mu, U_\mu)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\mu(\mathrm{Set})}(T_\mu, U_\mu)\end{aligned}$$

第三の同型では、i_μ が充満包含であることから $U_\mu \xrightarrow{\sim} i_\mu^* \mathrm{Lan}_{i_\mu^{\mathrm{op}}} U_\mu$ となることを用いた。

一方、Cond(Set) は fully faithful な遷移関手に沿う filtered colimit であるから、二つの対象の間の射は共通の十分大きい段階 μ で計算できる。従って $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(T,U) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\mu(\mathrm{Set})}(T_\mu, U_\mu)$ である。以上の同型を合わせると $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(T,U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})}(T,U)$ を得る。従って ι は fully faithful である。 □

注意 3.5

full condensed であるという条件は対象に課される性質であり、 cardinal κ や左 Kan 拡張による表示は追加の構造ではない。従って、二つの full condensed sets の間の $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ における自然変換には、condensed set の射となるための追加条件は存在しない。ただし、任意の $T \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr})$ が full condensed であるとは限らない。full condensed sets は、ある κ-small な段階から左 Kan 拡張によって復元される層、すなわち上の意味で到達可能な層だけからなる。

次の補題は、full condensed set と単に pro-étale site 上の層とを区別する際に使う。

補題 3.6

$S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ とし、$Z \subset S$ を閉部分集合とする。
このとき、$|\Lambda| < \kappa$ を満たす clopen subsets $C_\alpha \subset S$ の族が存在して $Z = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ と書ける。

証明 $x \in S \setminus Z$ を取る。S は compact Hausdorff であり、従って normal であるから、$x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset S \setminus Z$ を満たす開近傍 U_x を取れる。S は extremally disconnected なので $\overline{U_x}$ は開であり、定義から閉でもあるので clopen である。よって $C_x := S \setminus \overline{U_x}$ は Z を含み x を含まない clopen subset である。実際、$\overline{U_x} \cap Z = \emptyset$ であり、$x \in \overline{U_x}$ である。よって $Z \subset C_x$ がすべての $x \in S \setminus Z$ について成り立つ一方、$y \in S \setminus Z$ は C_y に属さない。したがって $Z = \bigcap_{x\in S\setminus Z} C_x$ である。$|S \setminus Z| \le |S| < \kappa$ なので、この交わりの添字集合の濃度も $< \kappa$ である。 □

以下で用いる ultrafilter の記法をまとめる。

定義 3.7

集合 I 上の **filter** とは、部分集合族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ であって、$I \in \mathcal{F}$、$\emptyset \notin \mathcal{F}$、有限交叉に関する閉性、上方閉性を満たすものをいう。
包含関係に関して極大な filter を **ultrafilter** と呼ぶ。これは、任意の $A \subset I$ に対して A と $I \setminus A$ のちょうど一方が $\mathcal{U}$ に属することと同値である。
$i \in I$ に対する $\mathcal{U}_i := \{A \subset I \mid i \in A\}$ を **principal ultrafilter** と呼ぶ。また、ultrafilter theorem により、任意の filter は ultrafilter に拡張できる。ここではこの定理を Zorn の補題と同値な選択原理として用いる。

補題 3.8

集合 I 上の ultrafilter $\mathcal{U}$ が有限集合を一つ含むならば、$\mathcal{U}$ は principal である。

証明 $F = \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{U}$ とする。いずれの k に対しても $\{i_k\} \notin \mathcal{U}$ であると仮定すると、ultrafilter の性質から $I \setminus \{i_k\} \in \mathcal{U}$ である。有限交叉を取れば $I \setminus F = \bigcap_{k=1}^{n} (I \setminus \{i_k\}) \in \mathcal{U}$ となり、$F \cap (I \setminus F) = \emptyset \in \mathcal{U}$ となるので矛盾する。よってある $i \in F$ について $\{i\} \in \mathcal{U}$ である。このとき、$i \in A$ なら $\{i\} \subset A$ と filter の上方閉性から $A \in \mathcal{U}$ である。逆に $A \in \mathcal{U}$ かつ $i \notin A$ ならば $A \cap \{i\} = \emptyset \in \mathcal{U}$ となり矛盾する。従って $A \in \mathcal{U} \iff i \in A$ であり、$\mathcal{U}$ は i における principal ultrafilter である。 □

前に用いた Stone–Čech compactification の具体形を確認する。集合 I に離散位相を入れた場合を βI と書くと、これは I 上の ultrafilter 全体の集合と同一視できる。principal ultrafilter により $I \subset \beta I$ とみなすと、この埋め込みの像は βI で dense である。このとき $A \subset I$ に対して $\widehat{A} := \{\mathcal{U} \in \beta I \mid A \in \mathcal{U}\}$ と書けば、ultrafilter の定義から $\beta I \setminus \widehat{A} = \widehat{I \setminus A}$ である。従って $\widehat{A}$ は clopen であり、Stone 位相の定義から $\{\widehat{A}\}_{A \subset I}$ は βI の clopen basis をなす。さらに、clopen subset $K \subset \beta I$ は compact なので、この basis による被覆から有限部分被覆 $K = \widehat{A_1} \cup \cdots \cup \widehat{A_n}$ を取れる。ultrafilter の二者択一性により $\widehat{A_1} \cup \cdots \cup \widehat{A_n} = \widehat{A_1 \cup \cdots \cup A_n}$ であるから、βI の clopen subset はすべて $\widehat{A}$ の形に尽くされる。

また、βI は extremally disconnected であることもここから直接確認できる。$U \subset \beta I$ を開集合とし、$A := U \cap I$ とおく。I は βI で dense なので、A は U で dense であり、$\overline{U} = \overline{A}$ となる。一方、$\overline{A} = \widehat{A}$ である。実際、$\widehat{A}$ は A を含む閉集合なので $\overline{A} \subset \widehat{A}$ である。逆に、$\mathcal{U} \in \widehat{A}$ とし、$\widehat{B}$ を $\mathcal{U}$ の basic clopen neighborhood とすると、$A, B \in \mathcal{U}$ より $A \cap B \neq \emptyset$ である。従って、ある $i \in A \cap B$ に対応する principal ultrafilter $\mathcal{U}_i$ が $A \cap \widehat{B}$ に属するので、$\mathcal{U} \in \overline{A}$ である。従って $\overline{U} = \widehat{A}$ は開集合であり、βI は extremally disconnected である。

補題 3.9

$A \subset I$ に対して、

$$\beta I \setminus I \subset \widehat{A} \quad \iff \quad I \setminus A \text{ は有限集合}$$

が成り立つ。ここで $I \subset \beta I$ は principal ultrafilter による埋め込みである。

証明 $I \setminus A$ が有限なら、定理 3.8 より principal でない ultrafilter は $I \setminus A$ を含まない。ultrafilter は集合とその補集合のちょうど一方を含むので、$\beta I \setminus I$ の任意の点は A を含み、$\widehat{A}$ に属する。逆に $J := I \setminus A$ が無限であるとする。J 上の cofinite filter を I 上へ延長して得られる filter

$$\mathcal{F} := \{B \subset I \mid J \setminus B \text{ は有限集合}\}$$

は真の filter であり、$J \in \mathcal{F}$ を含む。ultrafilter theorem によりこれを含む ultrafilter $\mathcal{U}$ を取る。有限集合 $E \subset I$ に対しては $J \setminus E \in \mathcal{F}$ かつ $E \cap (J \setminus E) = \emptyset$ であるから、$E \notin \mathcal{U}$ である。従って $\mathcal{U}$ は有限集合を含まず、定理 3.8 より principal ではない。一方で $J = I \setminus A \in \mathcal{U}$ であるから $A \notin \mathcal{U}$ である。よって $\mathcal{U} \in \beta I \setminus I$ だが $\mathcal{U} \notin \widehat{A}$ である。 □

注意 3.10 ([Sch26b, Warning 2.14])

位相空間 X に対して $\underline{X}\colon \mathrm{ProFin}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}, S \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, X)$ と定めると、$\underline{X}$ は full pro-étale site 上の層を与える。しかし、この構成は一般には full condensed set を与えない。

これは 定理 2.10 and 2.13 と矛盾しない。実際、任意の固定した κ に対して、制限 $\underline{X}_\kappa := \underline{X}|_{\mathrm{Extr}_\kappa^{\mathrm{op}}}$ は κ-condensed set である。ここで失敗するのは層条件ではなく、ある一つの κ が存在して

$$\mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} \underline{X}_\kappa \xrightarrow{\sim} \underline{X}|_{\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}}$$

となるという accessibility condition である。
実際、Sierpiński 空間 $X = \{s, \eta\}, \mathcal{O}(X) = \{\emptyset, \{\eta\}, X\}$ に付随する層 $\underline{X}$ は、各 κ への制限では κ-condensed set であるが、 full condensed set ではない。

証明　まず、任意の位相空間 X に対して $\underline{X}$ が full pro-étale site 上の層であることを確認する。full pro-étale site の任意の有限被覆に現れる対象と射は、ある非可算 strong limit cardinal κ に対してすべて $*_{\kappa\text{-proét}}$ に含まれる。 その制限は 定理 2.10 により層なので、もとの有限被覆に対する層条件も成り立つ。

次に、X を Sierpiński 空間 $X = \{s, \eta\}, \mathcal{O}(X) = \{\emptyset, \{\eta\}, X\}$ とする。任意の topological space S に対して、連続写像 $f\colon S \longrightarrow X$ を与えることと、S の閉部分集合を与えることは同値である。実際、f が連続ならば $f^{-1}(\{\eta\}) \subset S$ は開集合なので、その補集合 $Z_f := f^{-1}(\{s\})$ は閉集合である。逆に、閉部分集合 $Z \subset S$ に対して

$$f_Z(x) := \begin{cases} s & (x \in Z), \\ \eta & (x \notin Z) \end{cases}$$

と定める。このとき $f_Z^{-1}(\{\eta\}) = S \setminus Z$ は開集合であるから、f_Z は連続である。これら二つの構成は互いに逆であり、 S に関して自然である。従って、$S \in \mathrm{Extr}$ に対して

$$\underline{X}(S) \simeq \{\, Z \subset S \mid Z \text{ は閉集合} \,\} \tag{3}$$

と同一視できる。この同一視のもとで、射 $p\colon S' \to S$ による制限写像は $Z \longmapsto p^{-1}(Z)$ である。

ここで、背理法により $\underline{X}|_{\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}}$ が full condensed set であると仮定する。full condensed set の定義から、ある非可算 strong limit cardinal κ と $T_\kappa \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ が存在して $\underline{X}|_{\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}} \simeq \mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_\kappa$ と書ける。包含 $i_\kappa\colon \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}$ は fully faithful なので、左 Kan 拡張の unit $T_\kappa \longrightarrow i_\kappa^* \mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} T_\kappa$ は同型である。従って $T_\kappa \simeq i_\kappa^* \underline{X}$ であり、上の同型は左 Kan 拡張と制限の随伴の counit

$$\mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} \left(i_\kappa^* \underline{X}\right) \longrightarrow \underline{X} \tag{4}$$

が同型であることを意味する。以下では記号を簡略化するため、 $\underline{X}|_{\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}}$ を再び $\underline{X}$ と書く。$S \in \mathrm{Extr}$ を任意に取る。左 Kan 拡張の点ごとの公式により

$$\left(\mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} i_\kappa^* \underline{X}\right)(S) \simeq \operatorname*{colim}_{(i_\kappa^{\mathrm{op}}(S_\kappa) \to S)} \underline{X}(S_\kappa) \tag{5}$$

ここで、$\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}$ における射 $i_\kappa^{\mathrm{op}}(S_\kappa) \longrightarrow S$ は、圏 Extr における射 $p\colon S \longrightarrow S_\kappa$（$S_\kappa \in \mathrm{Extr}_\kappa$）に対応する。

$Z \subset S$ を任意の閉部分集合とする。(3) により $Z \in \underline{X}(S)$ である。(4) が同型であることと (5) から、Z はこの colimit のある段階における元で表される。従って、ある $S_\kappa \in \mathrm{Extr}_\kappa$、$p\colon S \longrightarrow S_\kappa$ および閉部分集合 $Z_\kappa \subset S_\kappa$ が存在して、

$$Z = p^{-1}(Z_\kappa) \tag{6}$$

と書ける。

定理 3.6 により、ある添字集合 Λ と clopen subsets $C_\alpha \subset S_\kappa$ が存在して $|\Lambda| < \kappa, Z_\kappa = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ と書ける。(6) に代入すると

$$Z = p^{-1}(Z_\kappa) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} p^{-1}(C_\alpha) \tag{7}$$

各 $p^{-1}(C_\alpha)$ は S の clopen subset である。従って、仮定から次の条件が導かれる：

任意の $S \in \mathrm{Extr}$ の任意の閉部分集合は、$< \kappa$ 個の clopen subsets の交わりである。 (8)

以下では (8) に反する閉部分集合を構成する。$|I| > \kappa$ を満たす集合 I を取り、前段の ultrafilter 表示と同じ記法で $S := \beta I$ とおく。上で確認したように S は extremally disconnected compact Hausdorff space、すなわち $S \in \mathrm{Extr}$ である。 上で定めた稠密埋め込み $I \subset \beta I$ を用いて $Z := \beta I \setminus I$ とおく。各 $i \in I$ に対して $\{\mathcal{U}_i\} = \widehat{\{i\}}$ は clopen であるから $I = \bigcup_{i\in I} \widehat{\{i\}}$ は βI の開部分集合である。従って Z は閉部分集合である。仮に Z が $< \kappa$ 個の clopen subsets の交わりであるとする。すると、 ある添字集合 Λ と clopen subsets $D_\lambda \subset \beta I$ が存在して

$$|\Lambda| < \kappa, \qquad \beta I \setminus I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda \tag{9}$$

と書ける。

βI の clopen subset はすべて、ある $A_\lambda \subset I$ を用いて $D_\lambda = \widehat{A_\lambda}$ と書ける。(9) から $\beta I \setminus I \subset \widehat{A_\lambda} (\lambda \in \Lambda)$ である。定理 3.9 により、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $I \setminus A_\lambda$ は有限集合である。

従って $E := \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(I \setminus A_\lambda)$ とおくと $|E| \leq \max\{\aleph_0, |\Lambda|\} < \kappa < |I|$ である。よって $i \in I \setminus E$ を取れる。この i はすべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $i \in A_\lambda$ を満たすので、対応する principal ultrafilter $\mathcal{U}_i$ は $\mathcal{U}_i \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \widehat{A_\lambda} = \beta I \setminus I$ を満たす。一方で $\mathcal{U}_i$ は principal ultrafilter なので $\mathcal{U}_i \in I$ である。これは矛盾である。

従って $Z = \beta I \setminus I$ は $< \kappa$ 個の clopen subsets の交わりとして表すことができず、(8) に反する。ゆえに $\underline{X}$ は full condensed set ではない。

以上により、位相空間から full pro-étale site 上の層を作る自然な構成は、各固定した κ では κ-condensed set を与える一方、一般には full condensed sets の圏に値を取らない。 □

full condensed set T を取る。T がある非可算 strong limit cardinal κ における制限からの左 Kan 拡張であるとする。このとき、集合 $T(*)$ に、すべての $S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ と $t \in T(S)$ から定まる写像 $\theta_{S,t} \colon S \longrightarrow T(*), s \longmapsto s^*t$ に関する終位相を入れる。この位相空間を $T(*)_{\mathrm{top}}$ と書く。

この位相は κ の選び方によらない。実際、より大きい cardinal における section は、左 Kan 拡張の点ごとの公式により、小さい extremally disconnected set 上の section から誘導される。従って、より大きい cardinal に属する probe を加えても終位相は変化しない。

定義 3.11

condensed set Q が **quasicompact** であるとは、ある profinite set S と condensed sets の全射 $\underline{S} \twoheadrightarrow Q$ が存在することをいう。condensed sets の射 $f \colon Q \to T$ が **quasicompact** であるとは、任意の profinite set S と任意の射 $\underline{S} \longrightarrow T$ に対して、ファイバー積 $Q \times_T \underline{S}$ が quasicompact condensed set であることをいう。

命題 3.12 ([Sch26b, Proposition 2.15])
次が成り立つ。

(i) 位相空間 X のすべての一点集合が閉集合、すなわち X が T_1 space であるとする。このとき

$$\underline{X}\colon \mathrm{Extr}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}, S \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, X)$$

は full condensed set である。さらに、任意の点 $x \in X$ に対して $\{x\} \longrightarrow \underline{X}$ は quasicompact である。

(ii) 逆に、T を full condensed set とし、任意の $x \in T(*)$ に対して $\{x\} \longrightarrow T$ が quasicompact であると仮定する。このとき $T(*)_{\mathrm{top}}$ は compactly generated な T_1 space である。

証明　まず (i) を示す。任意の位相空間 X に対して $S \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, X)$ は full pro-étale site 上の層であることは、定理 3.10 の証明で確認した。従って、X が T_1 であるとき、残る問題は、ある非可算 strong limit cardinal κ に対して $\underline{X}$ が Extr_κ への制限からの左 Kan 拡張になることを示すことである。

非可算 strong limit cardinal κ を、その cofinality $\lambda := \mathrm{cf}(\kappa)$ が

$$\lambda > |X \times X| \tag{10}$$

を満たすように選ぶ。包含を $i_\kappa\colon \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}$ と書く。任意の $\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}$ に対し、左 Kan 拡張の点ごとの公式から自然な写像

$$\Theta_{\widetilde{S}}\colon \left(\mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}} i_\kappa^* \underline{X}\right)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{(i_\kappa^{\mathrm{op}}(S) \to \widetilde{S})} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\widetilde{S}, X) \tag{11}$$

がある。

$\mathrm{Extr}^{\mathrm{op}}$ における射 $i_\kappa^{\mathrm{op}}(S) \longrightarrow \widetilde{S}$ は、圏 Extr における射 $p\colon \widetilde{S} \longrightarrow S$（$S \in \mathrm{Extr}_\kappa$）に対応する。(11) の写像は、$g\colon S \to X$ で表される元を $g \circ p\colon \widetilde{S} \longrightarrow X$ に送る。以下では $\Theta_{\widetilde{S}}$ が全単射であることを示す。

全射性:
連続写像 $f\colon \widetilde{S} \longrightarrow X$ を取る。目標は、ある $S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ と連続写像 $\widetilde{S} \xrightarrow{p} S \xrightarrow{g} X$ に f を分解することである。

相異なる点の組全体を $D := \{(x, y) \in X \times X \mid x \neq y\}$ とおく。各 $(x, y) \in D$ に対して $F_x := f^{-1}(\{x\})$、$F_y := f^{-1}(\{y\})$ とおく。X は T_1 なので $\{x\}$ と $\{y\}$ は閉集合であり、$F_x, F_y \subset \widetilde{S}$ は互いに素な閉部分集合である。$\widetilde{S}$ は extremally disconnected compact Hausdorff space であり、clopen subsets が位相の basis をなすので、互いに素な二つの閉部分集合を clopen subset で分離できる。従って $F_x \subset U_{x,y}$、$F_y \cap U_{x,y} = \emptyset$ を満たす clopen subset $U_{x,y} \subset \widetilde{S}$ を取れる。

$U_{x,y}$ の characteristic function を $\chi_{x,y}\colon \widetilde{S} \longrightarrow \{0, 1\}$ とし、これらの積を取って

$$q_0 := \prod_{(x,y) \in D} \chi_{x,y}\colon \widetilde{S} \longrightarrow \{0, 1\}^D$$

と定める。(10) から $|D| < \lambda \leq \kappa$ であり、κ は strong limit cardinal なので $\left|\{0, 1\}^D\right| \leq 2^{|D|} < \kappa$ である。この写像は、f が異なる値を取る二点を分離する。実際、$f(u) = x \neq y = f(v)$ ならば $\chi_{x,y}(u) = 1, \chi_{x,y}(v) = 0$ である。従って

$$q_0(u) = q_0(v) \quad \Longrightarrow \quad f(u) = f(v) \tag{12}$$

が成り立つ。

$K := q_0(\widetilde{S})$ とおき、$\{0,1\}^D$ の部分空間位相を入れる。K は κ-small compact Hausdorff space であり、$q_0\colon \widetilde{S} \twoheadrightarrow K$ は compact space から Hausdorff space への連続全射なので quotient map である。(12) により f は q_0 の各ファイバー上で一定であるから、一意な集合写像 $g_0\colon K \longrightarrow X$ であって $f = g_0 \circ q_0$ を満たすものが存在する。q_0 が quotient map であり f が連続であることから、g_0 も連続である。

次に、κ-small extremally disconnected compact Hausdorff space S と連続全射 $r\colon S \twoheadrightarrow K$ を取る。例えば $S := \beta(K^\delta)$ と取れる。κ が strong limit cardinal なので $|S| \leq 2^{2^{|K|}} < \kappa$ である。$\widetilde{S}$ は extremally disconnected なので、q_0 は r に沿って持ち上がる。すなわち

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & \overset{p}{\nearrow} & \big\downarrow r \\ \widetilde{S} & \xrightarrow[q_0]{} & K \end{array}$$

を可換にする $p\colon \widetilde{S} \to S$ が存在する。従って $f = g_0 \circ q_0 = (g_0 \circ r) \circ p$ であり、f は κ-small extremally disconnected set S を経由する。これで $\Theta_{\widetilde{S}}$ の全射性が示された。

単射性:

(11) の左辺の二つの元が同じ写像 $f\colon \widetilde{S} \longrightarrow X$ に送られるとする。これらを

$$\widetilde{S} \xrightarrow{p_i} S_i \xrightarrow{g_i} X, \qquad S_i \in \mathrm{Extr}_\kappa \qquad (i = 1, 2)$$

により表す。仮定は

$$g_1 \circ p_1 = g_2 \circ p_2 \tag{13}$$

である。

積 $S_1 \times S_2$ は κ-small compact Hausdorff space である。従って、ある $S_0 \in \mathrm{Extr}_\kappa$ と連続全射 $r_0\colon S_0 \twoheadrightarrow S_1 \times S_2$ が存在する。$\widetilde{S}$ は extremally disconnected なので $(p_1, p_2)\colon \widetilde{S} \to S_1 \times S_2$ は r_0 に沿って持ち上がる。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} & & S_0 \\ & \overset{q}{\nearrow} & \big\downarrow r_0 \\ \widetilde{S} & \xrightarrow[(p_1,p_2)]{} & S_1 \times S_2 \end{array}$$

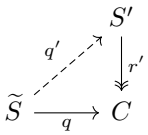
$h_i\colon S_0 \to S_i$ を r_0 と第 i 射影との合成とし、$a := g_1 \circ h_1$、$b := g_2 \circ h_2$ とおく。(13) から

$$a \circ q = b \circ q \tag{14}$$

である。

各 $(x, y) \in D$ に対して $A_{x,y} := a^{-1}(\{x\}) \cap b^{-1}(\{y\}) \subset S_0$ とおく。X は T_1 なので $A_{x,y}$ は閉集合である。また (14) と $x \neq y$ から $q(\widetilde{S}) \cap A_{x,y} = \emptyset$ である。$q(\widetilde{S})$ も compact であり、従って S_0 の閉部分集合である。S_0 では clopen subsets が位相の basis をなすので、$q(\widetilde{S}) \subset V_{x,y}$ かつ $V_{x,y} \cap A_{x,y} = \emptyset$ を満たす clopen subset $V_{x,y} \subset S_0$ を取れる。$C := \bigcap_{(x,y)\in D} V_{x,y}$ とおく。C は S_0 の閉部分集合なので compact Hausdorff であり、$|C| < \kappa$ である。また $q(\widetilde{S}) \subset C$ である。さらに C 上では $a = b$ である。実際、ある $z \in C$ に対して $a(z) \neq b(z)$ ならば $z \in A_{a(z),b(z)}$ である一方、$z \in C \subset V_{a(z),b(z)}$ となり、$V_{a(z),b(z)} \cap A_{a(z),b(z)} = \emptyset$ に矛盾する。

κ-small extremally disconnected compact Hausdorff space S' と全射 $r'\colon S' \twoheadrightarrow C$ を取る。$\widetilde{S}$ は extremally disconnected なので、$q\colon \widetilde{S} \to C$ は r' に沿って持ち上がる。すなわち、



包含 $C \hookrightarrow S_0$ と r' の合成を $u\colon S' \to S_0$ と書くと $a \circ u = b \circ u$ である。従って S' の段階で二つの代表元は一致する。よって二つの元は (11) の colimit において等しい。これで $\Theta_{\widetilde{S}}$ の単射性が示された。

以上から、すべての $\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}$ に対して

$$\Theta_{\widetilde{S}}\colon \left(\mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}}\, i_\kappa^* \underline{X}\right)(\widetilde{S}) \xrightarrow{\sim} \underline{X}(\widetilde{S})$$

は全単射である。従って $\underline{X} \simeq \mathrm{Lan}_{i_\kappa^{\mathrm{op}}}\, i_\kappa^* \underline{X}$ であり、$\underline{X}$ は full condensed set である。

次に、各点からの写像が quasicompact であることを示す。$x \in X$ とし、任意の profinite set S と射 $\underline{S} \longrightarrow \underline{X}$ を取る。この射は連続写像 $f\colon S \to X$ に対応する。condensed sets における pullback は

$$\underline{S} \times_{\underline{X}} \{x\} \simeq \underline{S \times_X \{x\}} = \underline{f^{-1}(\{x\})}$$

である。X は T_1 なので $\{x\}$ は閉集合であり、$f^{-1}(\{x\})$ は S の閉部分集合である。profinite set の閉部分集合は再び profinite set なので $\underline{f^{-1}(\{x\})}$ は quasicompact である。従って $\{x\} \longrightarrow \underline{X}$ は quasicompact である。これで (i) が示された。

次に (ii) を示す。まず、$T(*)_{\mathrm{top}}$ は定義から compactly generated である。実際、その位相は compact Hausdorff spaces $S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ からの写像 $\theta_{S,t}\colon S \longrightarrow T(*)_{\mathrm{top}}$ に関する終位相である。従って、すべての compact Hausdorff spaces からの連続写像に関する終位相に取り替えても位相は変化しない。残るのは、$T(*)_{\mathrm{top}}$ の各点が閉じていることを示すことである。$x \in T(*)$ を任意に取る。終位相の定義から、$\{x\} \subset T(*)_{\mathrm{top}}$ が閉集合であることを示すには、任意の $S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ と $t \in T(S)$ に対して

$$\theta_{S,t}^{-1}(\{x\}) \subset S \tag{15}$$

が閉集合であることを示せばよい。$t \in T(S)$ を射 $t\colon \underline{S} \longrightarrow T$ とみなし、pullback $Q := \underline{S} \times_T \{x\}$ を考える。仮定により $\{x\} \to T$ は quasicompact なので、base change $Q \to \underline{S}$ も quasicompact である。特に Q は quasicompact condensed set であり、ある profinite set $\widetilde{S}$ と全射 $\underline{\widetilde{S}} \twoheadrightarrow Q$ が存在する。

合成 $\underline{\widetilde{S}} \longrightarrow Q \longrightarrow \underline{S}$ は連続写像 $p\colon \widetilde{S} \longrightarrow S$ に対応する。$\widetilde{S}$ は compact であり、S は Hausdorff なので、像 $p(\widetilde{S}) \subset S$ は閉集合である。

一方、$\underline{\widetilde{S}} \to Q$ は全射なので、その像はちょうど $Q(*) \subset S$ である。pillback の定義から $Q(*) = \{s \in S \mid \theta_{S,t}(s) = x\} = \theta_{S,t}^{-1}(\{x\})$ である。

従って $\theta_{S,t}^{-1}(\{x\}) = p(\widetilde{S})$ は S の閉部分集合である。(15) がすべての S, t に対して成り立つので、終位相の定義から $\{x\}$ は $T(*)_{\mathrm{top}}$ の閉部分集合である。

$x \in T(*)$ は任意であったから、$T(*)_{\mathrm{top}}$ は T_1 space である。以上により (ii) が示された。 □

注意 3.13

定理 3.12 により、T_1 spaces の圏と、すべての点からの写像が quasicompact である full condensed sets の圏との間に随伴

$$(-)(*)_{\mathrm{top}} \ :\ \mathrm{Cond(Set)}_{\text{qc-points}} \rightleftarrows \mathrm{Top}_{T_1} \ :\ X \longmapsto \underline{X}$$

が得られる。すなわち、T のすべての点からの写像が quasicompact であり、X が T_1 space ならば、自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}\big(T(*)_{\mathrm{top}}, X\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(T, \underline{X})$$

が成り立つ。

定義 3.14

ondensed set T が **quasiseparated** であるとは、対角射 $\Delta_T \colon T \longrightarrow T \times T$ が quasicompact であることをいう。

T が **qcqs** であるとは、T が quasicompact かつ quasiseparated であることをいう。

定義 3.15

位相空間 X が **weak Hausdorff** であるとは、任意の compact Hausdorff space K と任意の連続写像 $f \colon K \longrightarrow X$ に対して、像 $f(K) \subset X$ が閉な compact Hausdorff subspace になることをいう。

次の補題を繰り返し用いる。

補題 3.16

S を compact Hausdorff space とし、$Q \hookrightarrow \underline{S}$ を quasicompact な sub-condensed set とする。このとき、ある閉部分集合 $A \subset S$ が一意に存在して $Q \simeq \underline{A}$ となる。

証明　Q は quasicompact なので、ある profinite set $\widetilde{S}$ と全射 $\underline{\widetilde{S}} \twoheadrightarrow Q$ が存在する。合成 $\underline{\widetilde{S}} \longrightarrow Q \hookrightarrow \underline{S}$ は連続写像 $p \colon \widetilde{S} \longrightarrow S$ に対応する。$\widetilde{S}$ は compact であり、S は Hausdorff なので、その像 $A := p(\widetilde{S}) \subset S$ は閉集合である。従って A は compact Hausdorff space である。

写像 p は連続全射 $\widetilde{S} \twoheadrightarrow A$ を誘導する。compact space から Hausdorff space への連続全射は商写像なので、対応する condensed sets の射 $\underline{\widetilde{S}} \twoheadrightarrow \underline{A}$ も全射である。従って $\underline{\widetilde{S}} \to \underline{S}$ の像は $\underline{A}$ である。一方、$\underline{\widetilde{S}} \twoheadrightarrow Q \hookrightarrow \underline{S}$ は全射と単射の分解なので、その像は Q である。よって $Q \simeq \underline{A}$ である。また $A = Q(*) \subset S$ なので、A の一意性も従う。 □

後半の証明では、次の位相的事実を用いる。

補題 3.17

$(X_i)_{i \in I}$ を compact Hausdorff spaces の filtered system とし、すべての遷移写像 $X_i \hookrightarrow X_j (i \leq j)$ が closed embedding であるとする。集合 $X := \mathrm{colim}_{i \in I} X_i$ に、各 $X_i \to X$ に関する終位相を入れる。このとき X は compactly generated weak Hausdorff space である。

証明　X の位相は compact Hausdorff spaces X_i からの写像に関する終位相なので、X は compactly generated である。weak Hausdorff 性を示すため、compact Hausdorff space S と連続写像 $f \colon S \longrightarrow X$ を取る。各 $i \in I$ に対して $S_i := f^{-1}(X_i) \subset S$ とおく。

まず $X_i \subset X$ は閉集合である。実際、終位相の定義から、X_i が閉であることは 各 X_j における逆像が閉であることと同値である。$k \geq i, j$ を取ると、この逆像は X_k における二つの閉部分集合

X_i, X_j の交わりに対応するので閉である。 従って $S_i = f^{-1}(X_i)$ も S の閉部分集合であり、compact Hausdorff space である。

$X = \bigcup_i X_i$ なので $S = \bigcup_i S_i$ である。また $(S_i)_i$ は filtered な閉部分集合の族である。$f_i := f|_{S_i} : S_i \to X_i$ とし、その像を $\overline{S}_i := f_i(S_i) \subset X_i$ とおく。S_i は compact であり、X_i は Hausdorff なので $\overline{S}_i$ は X_i の閉部分集合であり、compact Hausdorff である。 写像 f の像を $\overline{S} := f(S) = \bigcup_i \overline{S}_i$ とおく。各 X_i において $\overline{S} \cap X_i = \overline{S}_i$ は閉集合であるから、X の終位相の定義により $\overline{S}$ は X の閉部分集合である。

残るのは $\overline{S}$ が Hausdorff であることを示すことである。全射 $f : S \twoheadrightarrow \overline{S}$ が定める同値関係を $R := \{(s,t) \in S \times S \mid f(s) = f(t)\}$ とおく。各 i に対して $R_i := \{(s,t) \in S_i \times S_i \mid f_i(s) = f_i(t)\}$ とおくと、X_i は Hausdorff なので R_i は $S_i \times S_i$ の閉部分集合である。 filtered colimit に沿う closed embeddings は compactly generated spaces の圏で pullback と可換する。従って

$$S = \operatorname*{colim}_i S_i, \qquad S \times S = \operatorname*{colim}_i (S_i \times S_i), \qquad R = \operatorname*{colim}_i R_i$$

であり、$R \subset S \times S$ は閉部分集合である。 compact Hausdorff space 上の閉同値関係による商は compact Hausdorff である。従って $\overline{S} \simeq S/R$ は compact Hausdorff space である。以上により、任意の compact Hausdorff space から X への写像の像は閉な compact Hausdorff subspace となる。 ゆえに X は weak Hausdorff である。 □

定理 3.18 ([Sch26b, Theorem 2.16])
次が成り立つ。

(i) 関手 $X \longmapsto \underline{X}$ は、compact Hausdorff spaces の圏と qcqs condensed sets の 圏との圏同値

$$\mathrm{CHaus} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cond(Set)}_{\mathrm{qcqs}}$$

を誘導する。

(ii) X を compactly generated space とする。このとき、$\underline{X}$ が quasiseparated condensed set であることと、X が weak Hausdorff であることは同値である。より一般に、任意の quasiseparated condensed set T に対して $T(*)_{\mathrm{top}}$ は compactly generated weak Hausdorff space である。

(i) の証明　(1) compact Hausdorff space から qcqs condensed set を作る:

X を compact Hausdorff space とする。特に X は T_1 なので、定理 3.12 により $\underline{X}$ は full condensed set である。

まず $\underline{X}$ が quasicompact であることを示す。前述の Stone–Čech 被覆 $\beta(X^\delta) \twoheadrightarrow X$ を取る。$\beta(X^\delta)$ は profinite set なので、 対応する condensed sets の射 $\underline{\beta(X^\delta)} \twoheadrightarrow \underline{X}$ が得られる。従って $\underline{X}$ は quasicompact である。

次に $\underline{X}$ が quasiseparated であることを示す。任意の profinite set S と射 $\underline{S} \longrightarrow \underline{X} \times \underline{X}$ を取る。この射は二つの連続写像 $f_1, f_2 : S \longrightarrow X$ に対応する。

対角射 $\Delta_{\underline{X}}$ のこの射に沿う base change は $\underline{S} \times_{\underline{X} \times \underline{X}} \underline{X} \simeq \underline{E}$、 ただし $E := \{s \in S \mid f_1(s) = f_2(s)\} = (f_1, f_2)^{-1}(\Delta_X)$ である。

X は Hausdorff なので $\Delta_X \subset X \times X$ は閉集合である。従って $E \subset S$ は閉集合であり、profinite set の閉部分集合なので再び profinite set である。よって $\underline{E}$ は quasicompact である。これは $\Delta_{\underline{X}}$ の任意

の profinite base change が quasicompact であることを意味する。従って $\Delta_{\underline{X}}$ は quasicompact であり、$\underline{X}$ は quasiseparated である。以上から $\underline{X}$ は qcqs である。

(2) qcqs condensed set から compact Hausdorff space を作る:

T を qcqs condensed set とする。T は quasicompact なので、ある profinite set S と全射 $q\colon \underline{S} \twoheadrightarrow T$ が存在する。その kernel pair を $R := \underline{S} \times_T \underline{S} \rightrightarrows \underline{S}$ とおく。

T は quasiseparated なので、対角射 $\Delta_T\colon T \longrightarrow T \times T$ は quasicompact である。$R \to \underline{S} \times \underline{S}$ は Δ_T の base change なので、R は $\underline{S \times S}$ の quasicompact sub-condensed set である。 定理 3.16 により、ある閉部分集合 $R_0 \subset S \times S$ が存在して $R \simeq \underline{R_0}$ となる。R は q の kernel pair なので、R_0 は集合 S 上の同値関係である。

商位相を入れた集合 $X := S/R_0$ を考える。S は compact Hausdorff であり、$R_0 \subset S \times S$ は閉同値関係なので、 X は compact Hausdorff space である。 condensed sets の全射は effective epimorphism であるから

$$T \simeq \mathrm{Coeq}\,(R \rightrightarrows \underline{S}) \tag{16}$$

一方、$S \twoheadrightarrow X$ は full pro-étale site における被覆であり、その kernel pair は R_0 である。層の descent condition により

$$\underline{X} \simeq \mathrm{Coeq}\,\big(\underline{R_0} \rightrightarrows \underline{S}\big) \tag{17}$$

$R \simeq \underline{R_0}$ と (16), (17) を合わせると $T \simeq \underline{X}$ である。従って任意の qcqs condensed set は compact Hausdorff space から得られる。

最後に fully faithful 性を確認する。compact Hausdorff spaces X, Y は compactly generated であり $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \simeq X$ である。従って、以前に構成した随伴から

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(\underline{X}, \underline{Y}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}\big(\underline{X}(*)_{\mathrm{top}}, Y\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X, Y)\end{aligned}$$

よって $X \mapsto \underline{X}$ は fully faithful である。essential surjectivity は 上で示したので、(i) の圏同値が得られる。 □

(ii) の証明　(1) weak Hausdorff space から quasiseparated condensed set を作る:

X を compactly generated weak Hausdorff space とする。weak Hausdorff 性から一点集合は閉集合なので、X は T_1 space である。従って 定理 3.12 により $\underline{X}$ は condensed set である。

$\underline{X}$ が quasiseparated であることを示すため、二つの profinite sets S_1, S_2 と連続写像 $f_i\colon S_i \longrightarrow X (i = 1, 2)$ を取る。対角射 $\Delta_{\underline{X}}$ の対応する base change は

$$\underline{S_1} \times_{\underline{X}} \underline{S_2} \simeq \underline{S_1 \times_X S_2} \tag{18}$$

連続写像 $f_1 \amalg f_2\colon S_1 \amalg S_2 \longrightarrow X$ の像を $K \subset X$ とおく。$S_1 \amalg S_2$ は compact Hausdorff であり、 X は weak Hausdorff なので、K は閉な compact Hausdorff subspace である。 両方の f_i は K を経由するため $S_1 \times_X S_2 = S_1 \times_K S_2$ である。 K は Hausdorff なので、このファイバー積は $S_1 \times S_2$ の閉部分集合である。 従って $S_1 \times_X S_2$ は profinite set であり、 (18) は quasicompact である。以上から $\Delta_{\underline{X}}$ の任意の profinite base change は quasicompact である。従って $\underline{X}$ は quasiseparated である。

(2) quasiseparated condensed set に付随する位相空間を作る:

T を任意の quasiseparated condensed set とする。T は、その quasicompact sub-condensed sets の filtered union として書けることをまず確認する。

任意の profinite set S と射 $\underline{S} \longrightarrow T$ の像は quasicompact sub-condensed set である。また、二つの quasicompact sub-condensed sets $T_1, T_2 \subset T$ に対し、その和集合は $\underline{S_1 \amalg S_2} \longrightarrow T$ の像として得られるので、再び quasicompact である。従って quasicompact subobjects 全体は包含関係に関して filtered である。

さらに、condensed set は profinite sets からのすべての写像の像により被覆されるので

$$T = \bigcup_{i \in I} T_i = \operatorname*{colim}_{i \in I} T_i \tag{19}$$

と書ける。ただし各 $T_i \subset T$ は quasicompact sub-condensed set である。

各 T_i は quasiseparated でもある。実際、$\Delta_{T_i} \colon T_i \longrightarrow T_i \times T_i$ は Δ_T の base change なので quasicompact である。従って T_i は qcqs condensed set である。(i) により、ある compact Hausdorff space X_i が存在して $T_i \simeq \underline{X_i}$ となる。

$T_i \subset T_j$ のとき、対応する射 $\underline{X_i} \hookrightarrow \underline{X_j}$ は compact Hausdorff spaces の連続単射 $X_i \longrightarrow X_j$ から得られる。X_i は compact であり、X_j は Hausdorff なので、この写像は像への同相写像である。

また $\underline{X_i}$ は quasicompact sub-condensed set なので、 定理 3.16 により、その像は X_j の閉部分集合である。 従って $X_i \hookrightarrow X_j$ は closed embedding である。

(19) と $T(*)_{\mathrm{top}}$ の終位相の定義から

$$T(*)_{\mathrm{top}} \simeq \operatorname*{colim}_{i \in I} X_i \tag{20}$$

であり、右辺には $X_i \to \operatorname{colim}_i X_i$ に関する終位相を入れる。 定理 3.17 を (20) に適用すると、 $T(*)_{\mathrm{top}}$ は compactly generated weak Hausdorff space である。

最後に、X を compactly generated space とし、$\underline{X}$ が quasiseparated condensed set であると仮定する。上で示した一般的な主張により $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}}$ は weak Hausdorff である。一方、X は compactly generated なので、以前に構成した counit は同相写像 $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} X$ である。従って X は weak Hausdorff である。

逆向きはすでに示したので

$$X \text{ が weak Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{X} \text{ が quasiseparated}$$

が成り立つ。これで (ii) の証明が完了する。 □

注意 3.19

関係する位相空間の圏の間には、full subcategories の包含

$$\mathrm{Extr} \subset \mathrm{ProFin} \subset \mathrm{CHaus} \subset \mathrm{CGWH} \subset \mathrm{CGTop}$$

がある。ここで CGWH は compactly generated weak Hausdorff spaces の圏を表す。

4 Condensed abelian groups

定義 4.1

$\mathcal{C} = \mathrm{Ab}, \mathrm{Ring}, \mathrm{Alg}, \ldots$ のように、有限直積を用いて演算と公理が記述される代数的構造の圏と

する。κ-**condensed $\mathcal{C}$-object** とは $*_{\kappa\text{-pro\'et}}$ 上の $\mathcal{C}$ 値層のことであり、その圏を

$$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathcal{C}) := \mathrm{Sh}_{\mathcal{C}}(*_{\kappa\text{-pro\'et}})$$

と書く。

定理 4.2
定理 4.1 の $\mathcal{C}$ に対して

$$\mathrm{Sh}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}) \simeq \mathrm{Cond}_\kappa(\mathcal{C})$$

が成り立つ。

証明　命題 2.17 と [Sch26b, Proposition 2.17] より、$\mathrm{Sh}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})$ と $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ の同値は有限直積を保つ。実際、この同値の下では、有限直積の保存は空対象と二項直積の保存という有限個の図式に関する条件である。したがって群・環・代数など、有限直積だけで演算と公理を記述できる代数的構造を対象に与えることは、同値の前後で同じデータを与えることになる。例えば

$$\mathrm{Ab}\big(\mathrm{Sh}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})\big) \simeq \mathrm{Ab}\big(\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})\big)$$

一般の site $\mathcal{E}$ に対して $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Ab}(\mathrm{Sh}(\mathcal{E}))$ であるから、主張が従う。 □

定義 4.3
full condensed $\mathcal{C}$-objects の圏を $\mathrm{Cond}(\mathcal{C}) := \mathrm{colim}_\kappa \mathrm{Cond}_\kappa(\mathcal{C})$ と定める。定理 4.2 の圏同値のもとで、遷移関手は Extr_κ の包含に沿う左 Kan 拡張で与えられる。

定義 4.4
アーベル圏の対象 M が **compact** であるとは、関手 $\mathrm{Hom}(M, -)$ が filtered colimit を保つことをいう。

定義 4.5
任意の $T \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ に対して、**自由** condensed abelian group を $\mathbb{Z}[T] := (S \longmapsto \mathbb{Z}[T(S)])^\dagger$ と書く。ここで $(-)^\dagger$ は前層の層化を表す。この構成は忘却関手 $U\colon \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ の左随伴である。

主に用いる代数的対象は、extremally disconnected compact Hausdorff space 上で値を評価するだけでよい。

定理 4.6 ([Sch26b, Theorem 2.2])
$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ は次の性質を持つ Grothendieck abelian category である。

(Ab3)　任意の小さい colimit を持つ。
(Ab3*)　任意の小さい limit を持つ。
(Ab4)　coproduct は exact である。
(Ab4*)　product は exact である。

(Ab5)　filtered colimit は exact である。

(Ab6)　集合 J、filtered categories I_j、および filtered diagrams $(M_{j,i_j})_{i_j \in I_j}$ に対して、自然な射

$$\operatorname*{colim}_{(i_j) \in \prod_{j\in J} I_j} \prod_{j\in J} M_{j,i_j} \xrightarrow{\sim} \prod_{j\in J} \operatorname*{colim}_{i_j \in I_j} M_{j,i_j}$$

は同型である。

また、$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ は compact projective objects により生成される。

証明　定理 4.2 により $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})$ で考えればよい。$\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ の小さい skeleton を一つ固定する。前節の層条件の記述により、この圏は

$$F(\emptyset) = 0, \qquad F(T_1 \amalg T_2) \simeq F(T_1) \times F(T_2) \tag{21}$$

を満たす Ab 値関手の圏とみなせる。

Ab では有限直積と有限直和が一致する。このため、関手圏で点ごとに計算した任意の積、直和、kernel、cokernel は (21) を保つ。従って任意の小さい limit と colimit が存在し、いずれも各点で計算される。特に image と coimage も点ごとに計算され、Ab における Coim $\simeq$ Im から $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ は abelian category である。

Ab では任意の積と任意の直和が exact であり、filtered colimit も exact である。これらを各点で評価すれば、(Ab3)、(Ab3*)、(Ab4)、(Ab4*)、(Ab5) が従う。

(Ab6) は各 S で Ab における自然な写像

$$\operatorname*{colim}_{(i_j) \in \prod_{j\in J} I_j} \prod_{j\in J} M_{j,i_j} \longrightarrow \prod_{j\in J} \operatorname*{colim}_{i_j \in I_j} M_{j,i_j}$$

が同型であることに帰着する。右辺の元について各成分の代表元 $a_j \in M_{j,i_j}$ を選べば、左辺の元 $[(a_j)_{j\in J}]_{(i_j)}$ を得る。代表元を変えても、各 j について filteredness により共通の段階 k_j で像を一致させられるので、積添字圏の対象 $(k_j)_{j\in J}$ で二つの代表元は一致する。従ってこの対応は矛盾なく定まり、明らかに上の写像の逆である。よって (Ab6) が成り立つ。

最後に compact projective generators を構成する。固定した skeleton の対象 S に対し、representable condensed set $\underline{S}$ に自由関手を適用した対象を、略して $\mathbb{Z}[S]$ と書く。自由関手との随伴と Yoneda の補題から

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})}(\mathbb{Z}[S], M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(\underline{S}, U(M)) \simeq M(S)$$

である。評価関手 $M \mapsto M(S)$ は点ごとの計算から exact であり、filtered colimit を保つ。従って $\mathbb{Z}[S]$ は projective かつ compact である。

生成性を確認する。零でない M を取ると、ある skeleton の対象 S に対して $M(S) \neq 0$ である。上の同型により $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], M) \neq 0$ となるので、$\{\mathbb{Z}[S]\}_S$ は生成族である。従って $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ は compact projective objects により生成され、特に Grothendieck abelian category である。 □

定義 4.7

$M, N \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ に対し、symmetric monoidal tensor product を

$$M \otimes N := (S \longmapsto M(S) \otimes_{\mathbb{Z}} N(S))^\dagger$$

と定める。右辺の $(-)^\dagger$ は前層の層化を表す。

一般に $(M \otimes N)(S)$ が $M(S) \otimes_{\mathbb{Z}} N(S)$ と一致するわけではない。

注意 4.8

層化の普遍性から、任意の $P \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})}(M \otimes N, P) \simeq \mathrm{Bilin}(M, N; P)$$

が成り立つ。右辺は前層 $S \mapsto M(S) \otimes_{\mathbb{Z}} N(S)$ から P への射、すなわち双線形写像全体を表す。実際、$Q(S) := M(S) \otimes_{\mathbb{Z}} N(S)$ とおく。層の包含関手を ι と書くと $M \otimes N = Q^\dagger$ であり、随伴から

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})}(Q^\dagger, P) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})}(Q, \iota P)$$

となる。各 S で自由 abelian group の tensor product からの写像は双線形写像と一対一に対応するため、右辺は M, N から P への自然な双線形写像の集合である。

命題 4.9

$T_1, T_2 \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ に対して、

$$\mathbb{Z}[T_1] \otimes \mathbb{Z}[T_2] \simeq \mathbb{Z}[T_1 \times T_2]$$

が成り立つ。

証明　忘却関手を $U\colon \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ と書く。また、T_i に付随する自由 abelian group の前層を

$$\mathcal{P}_i\colon \mathrm{Extr}_\kappa^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab}, \qquad S \longmapsto \mathbb{Z}[T_i(S)] \qquad (i = 1, 2)$$

とおく。定義により $\mathbb{Z}[T_i] = \mathcal{P}_i^\dagger$ である。

まず、任意の $M \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ に対して自然な全単射

$$\mathrm{Bilin}\big(\mathbb{Z}[T_1], \mathbb{Z}[T_2]; M\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}\big(T_1 \times T_2, U(M)\big) \tag{22}$$

が存在することを示す。

自由 condensed abelian group の unit を

$$\eta_i\colon T_i \longrightarrow U\big(\mathbb{Z}[T_i]\big), \qquad t_i \longmapsto [t_i]$$

と書く。双線形写像 $b\colon \mathbb{Z}[T_1] \times \mathbb{Z}[T_2] \longrightarrow M$ が与えられたとき、$\eta_1 \times \eta_2$ と合成することにより

$$T_1 \times T_2 \xrightarrow{\eta_1 \times \eta_2} U\big(\mathbb{Z}[T_1]\big) \times U\big(\mathbb{Z}[T_2]\big) \xrightarrow{U(b)} U(M)$$

を得る。$S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ 上では、この写像は $(t_1, t_2) \longmapsto b_S([t_1], [t_2])$ で与えられる。これにより (22) の左辺から右辺への写像が定まる。

逆に、condensed sets の射 $f\colon T_1 \times T_2 \longrightarrow U(M)$ が与えられたとする。各 $S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ に対し、写像 $f_S\colon T_1(S) \times T_2(S) \longrightarrow M(S)$ を、二つの変数について自由 abelian group 上へ双線形に延長する。すな

わち

$$\widetilde{b}_S\colon \mathbb{Z}[T_1(S)]\times\mathbb{Z}[T_2(S)]\longrightarrow M(S),$$
$$\left(\sum_{i=1}^{r} n_i[t_i],\sum_{j=1}^{s} m_j[u_j]\right)\longmapsto\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_i m_j\, f_S(t_i,u_j)$$

と定める。

f は condensed sets の射、すなわち自然変換であるから、任意の射 $g\colon S'\to S$ に対して $g^*f_S(t_1,t_2)=f_{S'}(g^*t_1,g^*t_2)$ が成り立つ。従って $\widetilde{b}_S$ も S に関して自然であり、前層の双線形な自然変換 $\widetilde{b}\colon \mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2\longrightarrow M$ を定める。

層化関手 $(-)^\dagger$ は有限極限、特に有限直積を保つので、

$$(\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2)^\dagger\simeq\mathcal{P}_1^\dagger\times\mathcal{P}_2^\dagger=\mathbb{Z}[T_1]\times\mathbb{Z}[T_2]$$

また M は層であるから、層化の普遍性により $\widetilde{b}$ は一意的に写像 $b\colon \mathbb{Z}[T_1]\times\mathbb{Z}[T_2]\longrightarrow M$ へ延長される。

この延長は各変数について加法的である。実際、加法性は例えば第一変数について $b(x+x',y)=b(x,y)+b(x',y)$ という図式の可換性で表される。この図式は $\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2$ 上では $\widetilde{b}$ の構成から可換であり、層化後にも可換である。第二変数についても同様である。従って b は双線形写像である。

以上の二つの構成が互いに逆であることを確認する。f から構成した b は生成元上で $b_S([t_1],[t_2])=f_S(t_1,t_2)$ を満たすので、b を再び $T_1\times T_2$ に制限すると f に戻る。逆に、もとの双線形写像 b は各 S において生成元の値 $b_S([t_1],[t_2])$ によって一意に決まり、その値から作った $\widetilde{b}$ の層化は、層化の一意性により再び b となる。これで自然な全単射 (22) が示された。

ここで任意の $M\in\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ に対し、tensor product の普遍性、(22)、および自由・忘却随伴を順に用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})}\big(\mathbb{Z}[T_1]\otimes\mathbb{Z}[T_2],M\big)&\simeq\mathrm{Bilin}\big(\mathbb{Z}[T_1],\mathbb{Z}[T_2];M\big)\\&\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}\big(T_1\times T_2,U(M)\big)\\&\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})}\big(\mathbb{Z}[T_1\times T_2],M\big)\end{aligned}$$

これらの同型は M に関して自然である。従って Yoneda の補題により $\mathbb{Z}[T_1]\otimes\mathbb{Z}[T_2]\simeq\mathbb{Z}[T_1\times T_2]$ を得る。

この同型は具体的には、各 $S\in\mathrm{Extr}_\kappa$ において生成元を $[t_1]\otimes[t_2]\longmapsto[(t_1,t_2)]$ と送る自然な同型である。 □

命題 4.10
任意の $T\in\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ に対して、$\mathbb{Z}[T]$ は flat である。

証明　前層 $\mathcal{P}_T\colon S\longmapsto\mathbb{Z}[T(S)]$ を考えると、定義から $\mathbb{Z}[T]=\mathcal{P}_T^\dagger$ である。tensor product の定義と層化の普遍性により、任意の condensed abelian group M について

$$\mathbb{Z}[T]\otimes M\simeq\big(S\longmapsto\mathcal{P}_T(S)\otimes_{\mathbb{Z}}M(S)\big)^\dagger\tag{23}$$

各 S に対して $\mathcal{P}_T(S)=\mathbb{Z}[T(S)]$ は free abelian group、従って flat abelian group である。よって短完全列 $0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$ を各点で評価して $\mathcal{P}_T(S)$ との tensor product を取ると、再び短完全列を得る。層化は abelian group 値前層 の圏で exact であるから、(23) を用いて

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}[T]\otimes M'\longrightarrow\mathbb{Z}[T]\otimes M\longrightarrow\mathbb{Z}[T]\otimes M''\longrightarrow 0$$

が完全となる。従って $\mathbb{Z}[T]$ は flat である。 □

命題 4.11

tensor–Hom 随伴により、$M, N \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ に対して内部 Hom $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ が定まる。従って $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ は closed symmetric monoidal category である。

証明 まず cardinal κ を固定する。定理 4.6 により $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ は Grothendieck abelian category、特に locally presentable category である。$M \in \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Ab})$ に対し $-\otimes M$ は小さい colimit を保つ。実際、colimit は各点で計算でき、Ab における $-\otimes_{\mathbb{Z}} M(S)$ と層化はともに colimit を保つからである。随伴関手定理により、この関手は右随伴を持つ。これを $\underline{\mathrm{Hom}}(M,-)$ と書けば、自然な同型

$$\mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}(P \otimes M, N) \tag{24}$$

を得る。

この対象の値は free generators を用いて具体的にも書ける。すなわち $S \in \mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ に対して

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)(S) &\simeq \mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}[S], \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}[S]\otimes M, N\big)\end{aligned}$$

第一の同型は $\mathbb{Z}[S]$ の自由性、第二の同型は (24) による。

一般の $M, N \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ に対しては、両者を定義する共通の十分大きい κ を選び、上の構成を適用する。cardinal をさらに大きくしてもこの構成は free generators と tensor product の遷移に可換する。従って得られる対象は $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ において cardinal の選び方によらず、(24) を満たす。これが主張する内部 Hom である。 □

注意 4.12 ([Sch19, Warning 2.8])

[Sch19, Warning 2.8] では、condensed abelian group の derived category について、次のように述べられていたが、[Sch26b] では削除されている。

> "It is probably not true that $D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})) \cong \mathrm{Cond}(D(\mathrm{Ab}))$; for example, the right side has no a priori reason to even be a triangulated category, as categories of diagrams in a triangulated category are usually not triangulated (by the failure of functoriality of cones). Passing to ∞-categories resolves the issue, i.e. the derived ∞-category $D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ is indeed equivalent to $\mathrm{Cond}(D(\mathrm{Ab}))$; this is a general fact about sheaves of complexes on sites. Here, for any ∞-category $\mathcal{C}$, we define $\mathrm{Cond}(\mathcal{C})$ as contravariant functors from extremally disconnected sets to $\mathcal{C}$ taking finite disjoint unions to finite products (plus the set-theoretic condition explained in the appendix to this lecture)."

これはおそらく、[Sch26a, Lemma 11.8] でより一般の ∞-category に対して証明されているからだと思われる。

> Lemma 11.8. *Let $\mathcal{C}$ be a category that is generated under small colimits by $\mathcal{C}^{\mathrm{cp}}$. Then $\mathrm{Cond}(\mathcal{C})$ is still generated under small colimits by its compact projective objects, and there is a natural equivalence of ∞-categories*
>
> $$\mathrm{Cond}(\mathrm{Ani}(\mathcal{C})) \cong \mathrm{Ani}(\mathrm{Cond}(\mathcal{C})).$$

決して主張が間違っているから削除されたわけではないはずである。

参考文献

[BB26] Nathaniel Bannister and Dianthe Basak, *Condensed Sets and the Solovay Model*, arXiv:2602.09283 [math.LO], 2026. https://arxiv.org/abs/2602.09283.

[BLH24] Jeffrey Bergfalk and Chris Lambie-Hanson, *Infinitary combinatorics in condensed math and strong homology*, arXiv:2412.19605 [math.AT], 2024. https://arxiv.org/abs/2412.19605.

[BS13] Bhargav Bhatt and Peter Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, arXiv:1309.1198 [math.AG], 2013. https://arxiv.org/abs/1309.1198.

[CS26] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Condensed Mathematics and Complex Geometry*, arXiv:2605.11731 [math.CV], 2026. https://arxiv.org/abs/2605.11731.

[CS-AS] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Analytic Stacks*, lecture series, Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=YxSZ1mTIpaA. Accessed 2026-06-16.

[Ked] Kiran S. Kedlaya, *Notes on condensed mathematics*. https://kskedlaya.org/condensed/condensed.html.

[Lur09] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. https://doi.org/10.1515/9781400830558.

[MM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Man22] Lucas Mann, *A p-Adic 6-Functor Formalism in Rigid-Analytic Geometry*, arXiv:2206.02022 [math.AG], 2022. https://arxiv.org/abs/2206.02022.

[nLab] nLab authors, *nLab*. https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage. Accessed 2026-06-16.

[RZ26] Nima Rasekh and Qi Zhu, *Fractured Structures in Condensed Mathematics*, arXiv:2603.09618 [math.AT], 2026. https://arxiv.org/abs/2603.09618.

[RC26] Juan Esteban Rodríguez Camargo, *Notes on Solid Geometry*, arXiv:2603.03012 [math.AG], 2026. https://arxiv.org/abs/2603.03012.

[Sch26a] Peter Scholze, *Lectures on Analytic Geometry*, arXiv:2605.03655 [math.AG], 2026. https://arxiv.org/abs/2605.03655.

[Sch26b] Peter Scholze, *Lectures on Condensed Mathematics*, arXiv:2605.03658 [math.NT], 2026. https://arxiv.org/abs/2605.03658.

[Sch19] Peter Scholze, *Lectures on Condensed Mathematics*, lecture notes for the summer term 2019 at the University of Bonn, 2019.

[Shu18] Michael Shulman, *Comparing material and structural set theories*, arXiv:1808.05204 [math.LO], 2018. https://arxiv.org/abs/1808.05204.

[Sta] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu/. Accessed 2026-06-16.