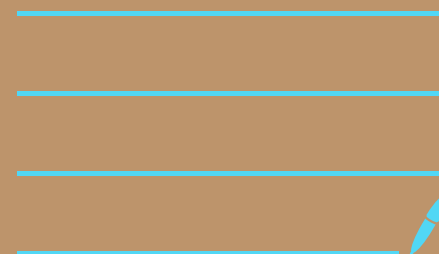


Fourier変換の今

spm31st
で実況してね

Twitter: @akari0koutya



① 古典フーリエ変換

フーリエ解析は、

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 ~ 1830)

が熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = F(x), \quad \left(\begin{array}{l} t: \text{時刻}, x: \text{位置}, \\ k: \text{熱拡散率} \end{array} \right)$$

を解く際に、フーリエ級数を導入したのが始まり。

f : π 上の連続関数。

Fourier 係数

$$Ff(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-\sqrt{-1}nt} dt.$$

Fourier 級数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ff(n) e^{\sqrt{-1}nt}$$

(* f が C^2 級の場合)

① $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換.

$C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := (\mathbb{R} \text{ 上の } \mathbb{C} \text{ 値連続関数全体})$

$\text{Supp } f := \text{Cl} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}, (f \in \text{Cont}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$

$C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \text{Supp } f \text{ は } \underline{\text{コンパクト}}\}.$
↳ 有界閉.

$L^1(\mathbb{R})$ であれば O.K.

Def.

$C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ni f$ の **Fourier 変換** とは、 $\xi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 上の.

$$\mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

で定められる変換のこて,

⑦ $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換.

$\mathbb{T}$ 上の Fourier 級数の話から、

区間 $[-L, L]$ 上の $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ の Fourier 級数展開は、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L f(y) e^{-in\frac{\pi}{L}y} dy \right) e^{-in\frac{\pi}{L}x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \frac{\pi}{L}\mathbb{Z}} \frac{\pi}{L} \left(\int_{-L}^L f(y) e^{-i\xi y} dy \right) e^{i\xi x}.$$

$$\left(L \rightarrow \infty \text{ で, } \frac{\pi}{L} \rightarrow 0, \int_{-L}^L f(y) e^{-i\xi y} dy \rightarrow \sqrt{2\pi} Ff(\xi) \right) \text{ リーマン和.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Ff(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad \swarrow f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ なので}$$

正当化可能.

↑ 逆変換を得られた.

* $L!$ だと収束するとは限らない.

① $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換.

ここで、 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の中で稠密なので、

Fourier 変換 $\mathcal{F}: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ を

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ に延長できる.

そして、この $\mathcal{F}$ は同型である.

↑ ユニタリ作用素.

Thm. (Plancherel の定理).

Fourier 変換.

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}^n).$$

はヒルベルト空間の間のユニタリ作用素.

⑧ $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換.

$f, g : L^2(\mathbb{R})$ での内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次で定める.

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

このとき, Fourier 変換・逆変換 $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1}$ により

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}g \rangle$$

という作用素の随伴がある.

① 表現論

Q. 群の表現 もなに考えるのか。

A. 群の表現 ... 群 が ベクトル空間 にどう影響するのか

表現 とは、対称性 が 集合や図形 の上で

・どう見えるか ということを考えている !!

メリット

群 そのものを調べる道具は少ない.....

→ ベクトル空間 と関係させることで、

強力な 不変量 を利用できるようになる !!

(eg. 行列式, 固有値, トレース, 直和分解,)

① 表現論

どのように 群の言葉とベクトル空間に翻訳するの？

Def.

G : 群, V : $\mathbb{C}$ -ベクトル空間.

群準同型 $\pi: G \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$ を G の V 上の表現という.

$$\ast GL_{\mathbb{C}}(V) := \underline{\text{Aut}_{\mathbb{C}} V}$$

$\uparrow$ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

$\dim \pi := \dim_{\mathbb{C}} V$ を表現の次元.

① 表現論

有限次元では、 $V \cong k^n$ が成立。

$\leadsto k$ が完備ノルム空間 (e.g. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$) なら、
 V は unique に位相が定まる。

これによって、有限次元では簡単に議論してよかった。

無限次元表現では、 V の位相を考慮する必要がある。

① 表現論

例は”.....

$$V = C([0,1], \mathbb{R}) \text{ 2-},$$

$$(V, \|\cdot\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |\cdot|), (V, \|\cdot\|_1 := \int_0^1 |\cdot| dx)$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\frac{1}{n} \leq x \leq 1) \end{cases} \quad \text{は連続.}$$

$$\left(\begin{array}{l} \bullet \|f_n(x)\|_\infty = 1 \quad \therefore f_n \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \bullet \|f_n(x)\|_1 = 0 \quad \therefore f_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{array} \right.$$

$\leadsto$ 位相が一致しない

Def.

$(\pi, V) : G$ の表現. , $g \in G$.

$W : V$ の部分ベクトル空間.

$$\pi(g)W := \{ \pi(g)w := (\pi(g)(w) \mid w \in W \}.$$

は V の部分ベクトル空間

にて,

$$\pi(g)W \subseteq W \quad (\forall g \in G)$$

が成り立つとき, W を G -不変な部分空間, あるいは
不変部分空間 といふ.

① 表現論

Def.

(π, V) : G の表現.

$\{0\}$ と V 以外に G -不変部分空間が存在しないとき,

(π, V) を **既約表現** と言う.

既約でない表現を **可約** と言う.

Example

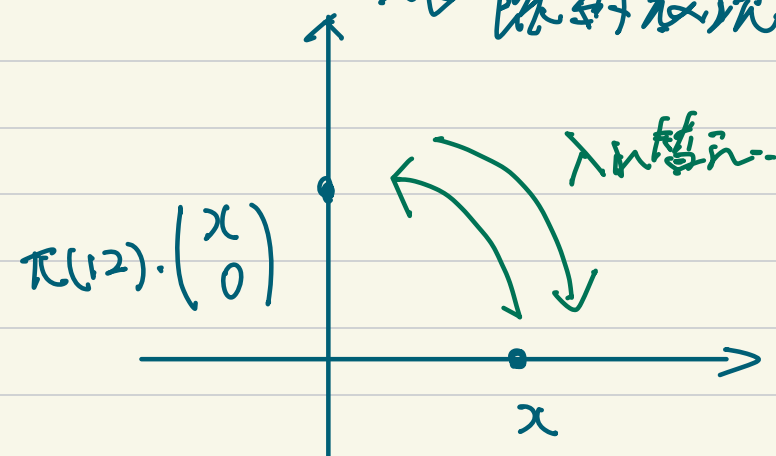
$$\pi: S_3 = \langle (123), (12) \rangle \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$$

$$\pi(123) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad \pi(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは 既約表現.

1次元表現が 不変でない!

$\leadsto$ 既約表現.



① 表現論

Example.

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{C}), t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

π -表現と定まる $\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ -不変部分空間.

実際, $r \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\pi(r) \cdot \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \pi(r^{-1}) \cdot \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pi(r) \cdot \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\forall r \in \mathbb{R}) \quad \text{O.K.}$$

$\leadsto$ 中なる $\mathbb{C}$ は G -不変部分空間が3種類.

$\therefore \pi$ は可約

① 表現論

Def.

V が 内積空間 として 完備 (i.e. コーシー列が収束) のとき,
 V を **Hilbert 空間** と言う.

Def.

$(V, \|\cdot\|)$: Hilbert 空間

任意の $g \in G$ に対し,

$$\|\pi(g) \cdot v\| = \|v\| \quad (\forall v \in V).$$

が成り立つとき、 $\pi \in G$ の **ユニタリ表現** と言う.

⑩ 表現論

Schur の補題

$V, V' : \mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間, $\dim V < \infty$

$(\pi, V), (\pi', V') : G$ 上の既約表現.

$A : V \rightarrow V'$ は連続線形で,

$$A\pi(g) = \pi'(g)A \quad (\forall g \in G).$$

このとき,

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 0 & (\pi \not\cong \pi') \\ \mathbb{C}I & (\pi \cong \pi') \end{cases}$$

Cor

可換群の $\mathbb{C}$ 上の有限次元既約表現は 1 次元.

① 表現論

Fourier 級数論を群の表現論から解釈する。

$n \in \mathbb{Z}$ を fix :

群準同型. $\chi_n: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $t \bmod 2\pi \mapsto e^{\sqrt{-1}nt}$

で, $\mathbb{C}^\times \cong GL_1(\mathbb{C})$ により,

$$\chi_n: \mathbb{T} \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$$

は $\mathbb{T}$ 上の 1 次元ユニタリ表現.

逆に $\chi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{T}$ 上の 1 次元表現. とすると,

χ は上の χ_n と同値であることがわかる.

アーベル群の有限次元既約表現は1次元.

↓ (* Schur の補題の Cor.)

Thm.

$\mathbb{T}$ 上の有限次元既約表現は、ある $n \in \mathbb{Z}$ に対する
 $\mathbb{Z} = 1$ 表現 χ_n と同値.

Thm.

$\{e^{i n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の正規直交系基底.

Fourier の哲学

関数 を 自然な 対称性 を表す成分で 分解 する.

Def.

G : コンパクト位相群.

・ G の既約ユニタリ表現の同値類全体を $\hat{G}$ で表し,

ユニタリ双対

という. 群とは限らない.

・ G の有限次元既約表現の同値類全体を $\hat{G}_f$ で表す

Def.

$f \in L^1(G)$, $(\pi, V) \in \hat{G}$ に對し,

$$\int_G f(g) \pi(g^{-1}) d\mu(g) ?$$

$$Ff(\pi) := \int_G f(g) \pi(g^{-1}) d\mu(g) \in \text{End } V.$$

を Fourier 係数 といふ.

Thm. (Peter-Weyl の定理).

G : コンパクト 群.

$$\bigcup_{\pi \in \widehat{G}_f} \{ \sqrt{\dim \pi} \cdot \pi_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq \dim \pi \}$$

は $L^2(G)$ の 正規直交基底 と与える. 特に, $G \times G$ の 表現 として,

$$L^2(G) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} V_\pi \otimes V_\pi^*.$$

また, 有限個の行列要素の線形結合は $C(G)$ に一様ノルムで稠密.

更に, 次の自然な全単射がある

$$\widehat{G}_+ \cong \widehat{G}_f$$

⑪ 代数幾何入門

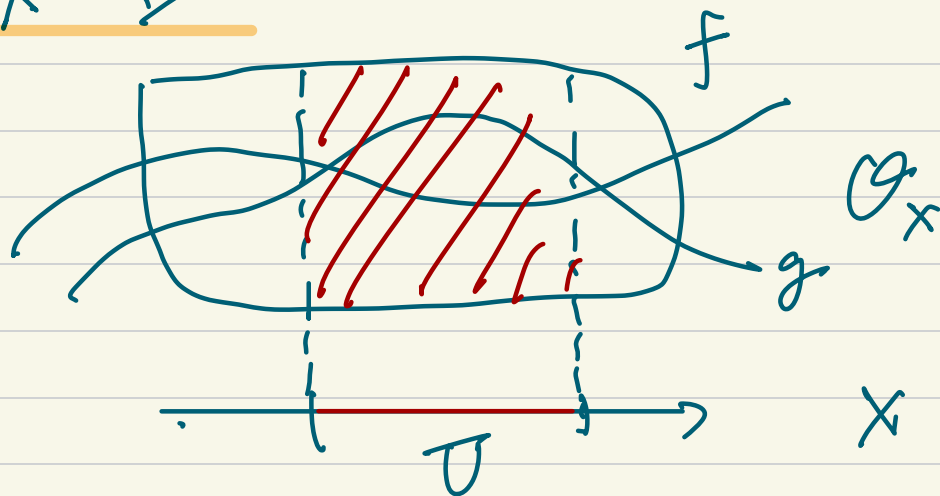
位相空間上の層 $\dots$

(大体、) 各開集合に対して付随する関数空間
のデータを貼り合わせられるもの。

環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X) \dots$

位相空間 X とその上の環の層 $\mathcal{O}_X$ の組のこと。

イメージ



各 $\mathcal{O}_X(U)$ は U 上で定義された
関数全体で、環をなすもの

⑩ Fourier-Mukai 変換.

古典 Fourier 変換 : 関数 を 関数 へ送る.

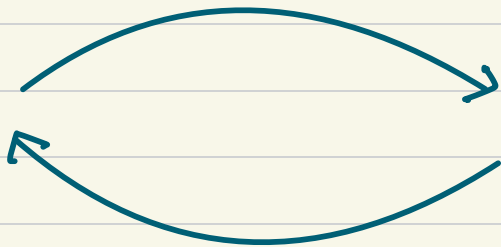
↓ 幾何化.

Fourier-Mukai 変換 : 層 (の複体) を 層 (の複体) へ送る

Fourier 変換のイメージ

積分核による分解

関数空間



Spectrum.

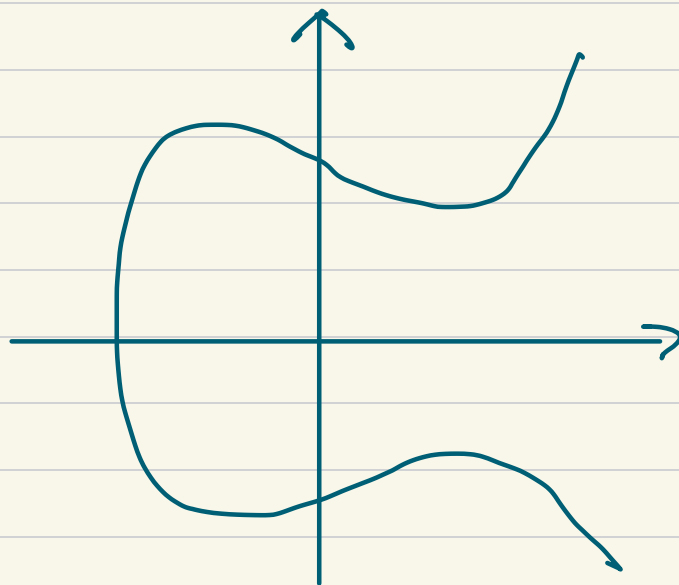
双対積分核による合成

Def.

- ・ **代数多様体** とは、体上 of finite type scheme のこと.
- ・ **代数群** とは、代数多様体であって、その上で正則写像によって群構造が入っているもの.
- ・ **アベル多様体** とは、体上の連結かつ完備 (or 射影的) な代数群.

e.g.

- ・ $\text{Spec } k[X]$ は 代数多様体.
- ・ $\text{Spec } k[X, X^{-1}]$ は 代数群.
- ・ 楕円曲線 は アベル多様体.
(種数 1 の smooth proj. curve).



A : アーベル多様体.

$\text{Pic } A$ の部分群.

$$\hat{A} := \{ L \in \text{Pic}(A) \mid \text{閉点 } \forall a \in A, t_a^* L \cong L \}.$$

$$\left(t_a : A \xrightarrow{\sim} A, b \mapsto a * b, * \text{ は } A \text{ の演算} \right)$$

Thm. (Mukai, 1981).

$A \times \hat{A}$ 上の Poincaré 束 $\mathcal{P}$ に対し、次の三角同値がある.

$$\Phi_A : D^b \text{Coh}(A) \xrightarrow{\sim} D^b \text{Coh}(\hat{A})$$

$$E \longmapsto R p_{\hat{A},*} (p_A^* E \otimes^L \mathcal{P}).$$

$$\left(\begin{array}{l} * \quad p_A : A \times \hat{A} \rightarrow A, \\ p_{\hat{A}} : A \times \hat{A} \rightarrow \hat{A} \quad \text{この自然な射影.} \end{array} \right)$$

⑧ Fourier-Mukai 変換.

Grothendieck duality.

X, Y : smooth, of finite type, k -scheme.

$f: X \rightarrow Y$: proper.

$E \in D^b(\text{Coh}(X))$, $F \in D^b(\text{Coh}(Y))$.

このとき、次の随伴性がある.

$$\text{Hom}_X(Lf^*E, F) \simeq \text{Hom}_Y(E, \underline{\text{Rf}_*F}) \simeq \text{Hom}_X(F, f^!E)$$

↑

(pullback pushout の随伴性から明らか)

↑

非自明.

$$Lf^* \dashv \text{Rf}_* \dashv f^!$$

⑧ Fourier-Mukai 変換.

この Grothendieck duality を用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\Phi_A E, F) &\cong \mathrm{Hom}_{A \times \hat{A}}(p_A^* E \otimes \mathcal{P}, p_{\hat{A}}^! F) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{A \times \hat{A}}(p_A^* E, \mathcal{P}^\vee \otimes p_{\hat{A}}^! F) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(E, R p_* (\mathcal{P}^\vee \otimes p_{\hat{A}}^* F \otimes p_A^* \omega_A)[2]) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(E, (-1_A)^* \Phi_{\hat{A}}(F)[2])\end{aligned}$$

$$\therefore \Phi_A \dashv (-1_A)^* \Phi_{\hat{A}}[2].$$

※ 核の双射化が 反転,
Grothendieck duality が ズレ を生じ

⑪ Analogy.

表現論側

コンパクト群 G

ユニタリ双対 $\hat{G}$

核 $\pi(g^{-1})$

積分 $\int_G$

Fourier 変換 $\int_G f(g) \pi(g^{-1}) d\mu(g)$

逆変換 $\sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \text{Tr}(\hat{f}(\pi) \pi(g)).$

代数幾何側

アーベル多様体 A

双対多様体 $\hat{A}$

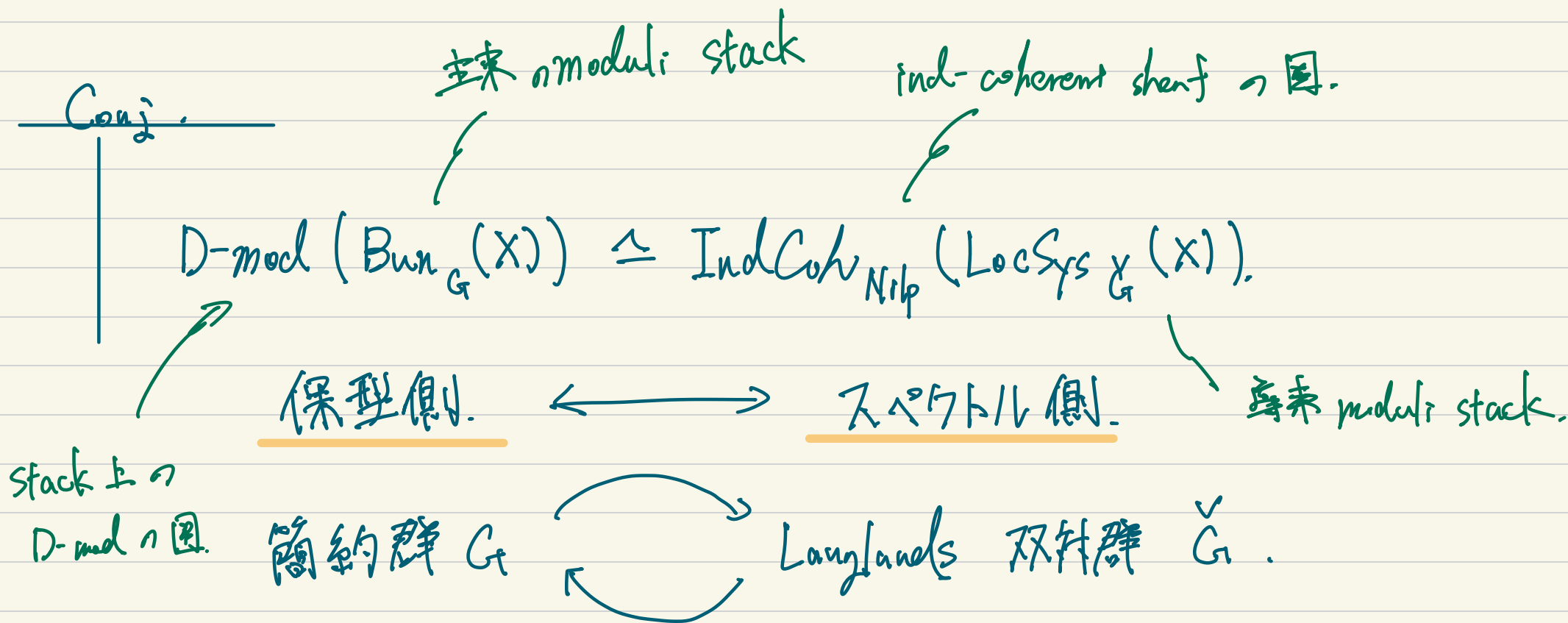
Poincaré 束 $\mathcal{P}$

導来 push out $R p_{\hat{A}*}$

FM 変換 $R p_{\hat{A}*} (p_A^* \mathbb{E} \otimes \mathcal{P}).$

逆変換 $(-1_A)^* \Phi_{\hat{A}} F[g].$

⑦ 幾何学的ランゲランズ



→ 非可換 Fourier-Mukai 変換 と呼べる!!

- [1] 小林俊行・大島利雄『リー群と表現論』岩波書店，東京，2005年.
- [2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977. [doi:10.1007/978-1-4757-3849-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0).
- [3] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, Vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002. [doi:10.1093/oso/9780198502845.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198502845.001.0001).
- [4] S. Mukai, “Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves,” *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 81 (1981), pp. 153–175. [doi:10.1017/S002776300001922X](https://doi.org/10.1017/S002776300001922X).
- [5] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2006. [doi:10.1093/acprof/9780199296866.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof/9780199296866.001.0001).
- [6] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966. [doi:10.1007/BFb0080482](https://doi.org/10.1007/BFb0080482).
- [7] D. Arinkin and D. Gaiitsgory, “Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture,” *Selecta Mathematica (New Series)*, Vol. 21, No. 1 (2015), pp. 1–199. [doi:10.1007/s00029-014-0167-5](https://doi.org/10.1007/s00029-014-0167-5).
- [8] D. Gaiitsgory and S. Raskin, “Proof of the geometric Langlands conjecture I: construction of the functor,” preprint, 2024. [arXiv:2405.03599](https://arxiv.org/abs/2405.03599) [math.AG].